COMPUTERGESTÜTZTES

CONTROLLING

ARBEITSBERICHTE

Nr. 28

Heinz Lothar Grob
Jan Hermans

Lineare Programmierung mit What's Best

November 2006

HERAUSGEBER:

PROF. DR. HEINZ LOTHAR GROB
INSTITUT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

LEONARDO-CAMPUS 3, 48149 MÜNSTER, TEL. (0251) 83-38000, FAX (0251) 83-38009
E-MAIL: Grob@wi.uni-muenster.de, WWW: http://www-wi.uni-muenster.de/aw

Inhalt

1 Einleitung

Die Lineare Programmierung stellt ein Verfahren zur Optimierung von Entscheidungsproblemen dar, bei denen die Struktur des zugrunde liegenden Modells folgende Merkmale aufweist:[1]

- **Lineare Abhängigkeit der Zielfunktion**: Die Zielfunktion, die zu minimieren oder zu maximieren ist, hängt linear von den in das Modell eingehenden Variablen ab. Eine Berücksichtigung von Interdependenzen zwischen diesen Variablen ist nicht möglich.
- **Restriktionen**: Der Raum, der die Lösungen begrenzt, kann durch die Angabe von Restriktionen in Gleichungs- oder Ungleichungsform beschrieben werden. Analog zur Zielfunktion gilt für die in die Restriktionen eingehenden Größen, dass diese ebenfalls eine lineare Form aufweisen.
- **Stetige Variablenbelegung**: Die Ausprägungen der Eingangsvariablen können innerhalb des durch die Restriktionen definierten Lösungsraums beliebige reelle Werte annehmen.

Entscheidungsprobleme, die diesen Anforderungen entsprechen, werden in der so genannten Standardform[2] wie folgt ausgedrückt:

Wähle die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so, dass die Zielfunktion

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \quad \ldots \quad + c_nx_n$$

unter Einhaltung der Restriktionen

$$a_{11}x_1 \quad + a_{12}x_2 \ \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 \quad + a_{22}x_2 \ \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 \quad + a_{m2}x_2 \ \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

sowie den optionalen Nicht-Negativitätsbedingungen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

maximiert wird. Bei einer Minimierung der Zielfunktion weisen die Nebenbedingungen die Form von $\geq$-Bedingungen auf.

---

1 Vgl. Adam, D. (1996), S. 460.

2 Vgl. Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (1997), S. 30 ff.

Ein Lösungsalgorithmus für derartig strukturierte Entscheidungsprobleme ist das auf DANTZIG zurückgehende Simplexverfahren.[1] Bei diesem iterativen Verfahren wird in jedem Schritt ein Gleichungssystem gelöst, wobei die jeweilige Lösung alle Restriktionen des LP-Modells erfüllt. Anhand eines Abbruchkriteriums kann festgestellt werden, ob eine optimale Lösung ermittelt wurde oder ob eine weitere Iteration erforderlich ist. Das Simplexverfahren lässt sich leicht in einem PC-Werkzeug implementieren.[2]

2 Softwarewerkzeuge für die Lineare Programmierung

Auf dem Softwaremarkt ist mittlerweile eine Vielzahl von PC-Werkzeugen zur Linearen Programmierung verfügbar. Im Rahmen einer Web-Recherche wurden 22 Produkte identifiziert, die in Abb. 1 aufgelistet worden sind. Neben kommerziellen Produkten konnte auch eine Reihe von Open Source-Werkzeugen für die Lineare Programmierung gefunden werden.

Name	Hersteller	Excel-Plugin	Open Source
Bpmpd	mehrere Universitäten	nein	ja
CPLEX	ILOG	nein	nein
Decision Pro – Linar Programming Software	Vanguard Software	nein	nein
Gipals	Optimalon Software	nein	nein
GNU Linear Programming Kit	Unbekannt	nein	ja
HOPDM	Professor Jacek Gondzio	nein	ja
LINDO API	Lindo	nein	nein
Linear Programming Solver	QSOpt	nein	nein
Linear Programming Tool	Archer Tools	nein	nein
Lingo	Lindo	nein	nein
Lpabo	Operations Research Laboratory	nein	ja
LP-Optimizer	Arizona State University, Hans Mittelmann	nein	ja
Math Program Inspector	AIMMS	nein	nein
Mehrere Projekte, siehe Website	COIN-Or	nein	ja
Mixed Integer Programming Solver	Unbekannt	nein	ja
MOSEK	Mosek	nein	nein
PCx	Optimization Technology Center	nein	ja
Premium Solver	Frontline Systems inc.	ja	nein
SoPlex	Konrad Zuse Zentrum für Informationstechnik	nein	ja
What's Best	Lindo	ja	nein
Xpress-MP Suite	Dash	nein	nein
Zimpl	Konrad Zuse Zentrum für Informationstechnik	nein	ja

Abb. 1: Softwarewerkzeuge für die Lineare Programmierung

[1] Vgl. Dantzig, G. B. (1949) .

[2] Vgl. Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (1997), S. 25.

Die verfügbaren Softwarewerkzeuge können danach unterschieden werden, ob sie als Stand-Alone-Anwendung oder als Plugin für Microsoft Excel ausgeliefert werden. Da bei betrieblichen Entscheidungsproblemen häufig Tabellenkalkulationsprogramme verwendet werden[1], eignen sich hier Excel-Plugins in besonderem Maße. Nach einer Evaluation unter Berücksichtigung softwareergonomischer und monetärer Kriterien wurde das Programm What's Best für eine detaillierte Darstellung ausgewählt.

3 Lineare Programmierung mit What's Best

3.1 Demo-Beispiel

Das PC-Werkzeug What's Best wird als Excel-Plugin von der Firma Lindo Systems vertrieben. Alternativ zum Erwerb kommerzieller Lizenzen können Anwender das Produkt kostenfrei als Demo-Version einsetzen, wobei jedoch nur ein eingeschränkter Funktionsumfang zur Verfügung steht. Sowohl die maximale Anzahl der Restriktionen als auch die Menge der zu optimierenden Variablen unterliegen Einschränkungen. Während für praktische Zwecke die volle Funktionalität relevant sein dürfte, reicht für die Einführung in What's Best die eingeschränkte Version. Im vorliegenden Beitrag wird What's Best 8.0 verwendet.

Zur Erleichterung des Einstiegs werden die einzelnen Schritte des hier darzustellenden Vorgehensmodells anhand eines Demo-Beispiels illustriert. Das Demo-Beispiel geht vom Fall einer einperiodigen Produktionsprogrammplanung für zwei Produkte und zwei Fertigungsstufen aus. Die produktspezifischen Daten sind in der folgenden Abbildung aufgelistet worden:

	Produkt 1	Produkt 2
Deckungsspanne [€/Stck]	4	5
Produktionskoeffizient Fertigungsstufe 1 [ZE/Stck]	5	2
Produktionskoeffizient Fertigungsstufe 2 [ZE/Stck]	4	7
Maximale Absatzmenge [Stck]	600	400

Abb. 2: Deckungsspannen, Produktionskoeffizienten und Absatzmengen

[1] Vgl. Grob, H. L. (2006), S. 124 ff.

Die beiden Fertigungsstufen verfügen über die in Abb. 3 aufgelisteten Kapazitäten.

	Kapazität [ZE]
Fertigungsstufe 1	4.000
Fertigungsstufe 2	5.000

Abb. 3: Kapazitäten

Zur Ermittlung des optimalen Produktionsprogramms mit der Linearen Programmierung ist das Planungsproblem als LP-Modell zu formulieren (Abb. 4).

$$
\begin{array}{rrcr}
4x_1 & + 5x_2 & \rightarrow & \text{max!} \\
5x_1 & + 2x_2 & = & 4.000 \\
4x_1 & + 7x_2 & = & 5.000 \\
x_1 & & = & 600 \\
 & x_2 & = & 400
\end{array}
$$

Abb. 4: LP-Modell zur Produktionsprogrammplanung

Die Variablen x_1 und x_2 stellen die Produktionsmengen der beiden Produkte dar. Die ersten beiden Ungleichungen ergeben sich aus den Kapazitätsrestriktionen. Die letzten beiden Ungleichungen bilden die Absatzhöchstmengen ab. Im Folgenden wird angenommen, dass die Produktionsmengen beliebig teilbar sind.

3.2 Vorgehensmodell

Zur Beschreibung von LP-Modellen mit What’s Best wurde vom Hersteller Lindo Systems das Vorgehensmodell ABC (*A*djustable – *B*est – *C*onstraints) entwickelt. ABC setzt jedoch die Formulierung der funktionalen Zusammenhänge im Spreadsheet voraus. Auch beinhaltet es nicht den Schritt der Optimierung des LP-Modells. Aus diesen Gründen wird die Entwicklung eines umfassenderen Vorgehensmodells als sinnvoll angesehen (vgl. Abb. 5).

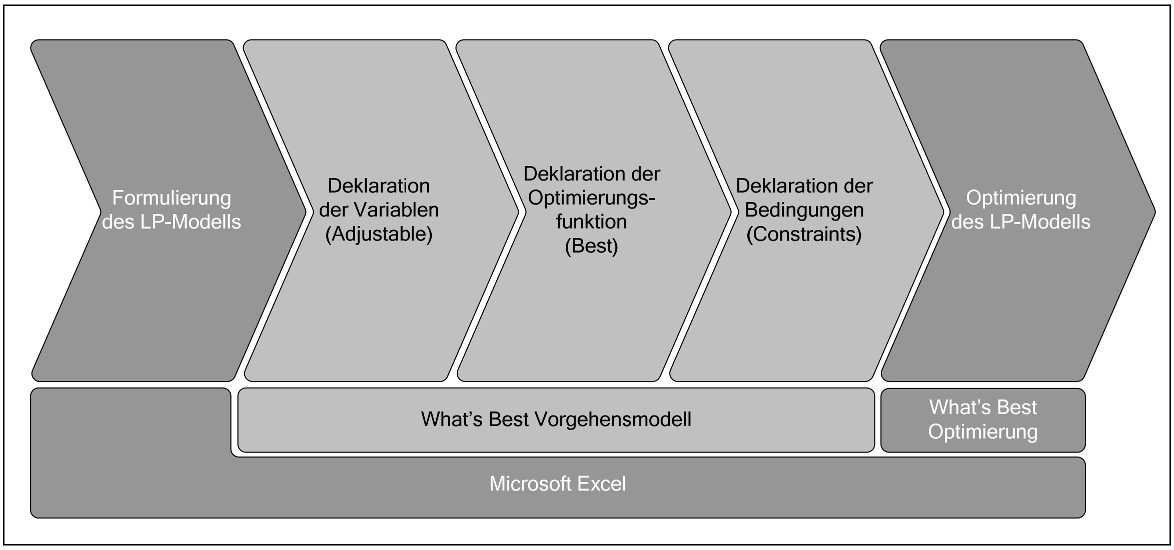

Abb. 5: Vorgehensmodell zur Optimierung von LP-Modellen

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte des Vorgehensmodells erörtert und anhand des Demo-Beispiels illustriert.

Formulierung des LP-Modells

Zunächst ist das in Abb. 4 dargestellte LP-Modell in ein Spreadsheet zu übernehmen. Die Zielfunktion und die Restriktionen sind formelmäßig zu formulieren (vgl. Abb. 6).

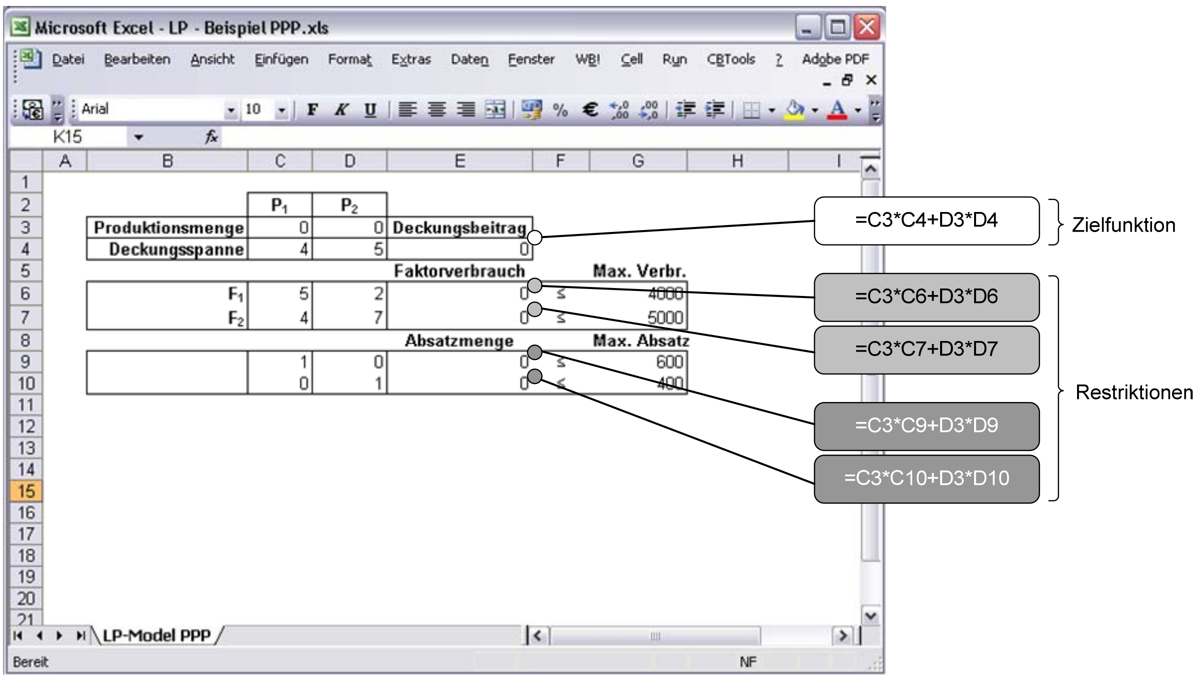

Abb. 6: Abbildung des LP-Modells in Microsoft Excel

Deklaration der Variablen (Adjustable)

Nach der Formulierung des LP-Modells im Spreadsheet sind die in Zielfunktion und Restriktionen eingehenden Variablen festzulegen. Hierfür werden Zellen mit Zahlenwerten in der Arbeitsmappe markiert und anschließend als „Adjustable"-Zellen deklariert. Über einen weiteren Dialog kann der Wertebereich dieser Variablen zusätzlich auf ganze bzw. binäre Zahlen beschränkt werden. Im Demo-Beispiel sind die Produktionsmengen für P_1 und P_2 in den Zellen C3 und D3 als ganzzahlige Variablen festzulegen (Abb. 7).

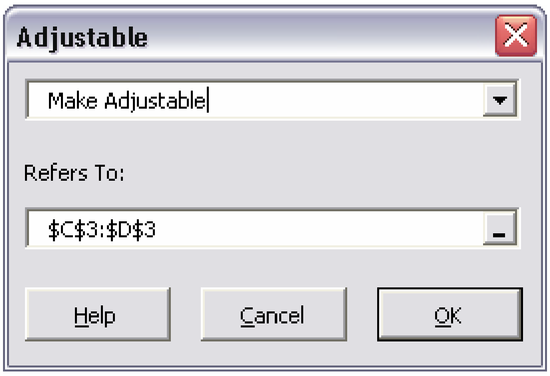

Abb. 7: Deklaration von Variablen mit What's Best

Die Deklaration einer Variablen kann über die Auswahl der Option „Remove Adjustable" zurückgenommen werden.

Deklaration der Optimierungsfunktion (Best)

Im nächsten Schritt ist der Zielwert der Optimierungsvorschrift auszuwählen. Die Vorschrift muss bereits als Formel in einer Zelle hinterlegt sein. Zur Vermeidung von Rechenaufwand bei der Optimierung ist darauf zu achten, dass alle deklarierten Variablen direkt oder indirekt in die Optimierungsvorschrift oder in die Restriktionen eingehen. Werden bestimmte Variablen nicht berücksichtigt, ist die Variablendeklaration für die entsprechenden Zellen wie oben beschrieben zurückzunehmen. Bei der Festlegung des Zielwerts ist anzugeben, ob dieser maximiert oder minimiert werden soll. Im Demo-Beispiel ist der Deckungsbeitrag in der Zelle E4 als zu maximierender Zielwert auszuwählen (vgl. Abb. 8).

Abb. 8: Deklaration der Zielfunktion

Analog zur Zurücknahme der Auswahl von Variablen kann die Deklaration der Zielvorschrift durch Auswahl der Option „none" verworfen werden.[1]

Deklaration der Bedingungen (Constraints)

Nach der Optimierungsvorschrift sind die Restriktionen zu deklarieren. Jede Restriktion benötigt drei Zellen: Die erste Zelle („Left-Hand-Side", LHS) enthält eine Formel, die die Ausprägung der Restriktion in Abhängigkeit der jeweiligen Variablenbelegung angibt. Während der Lösung des LP-Modells berechnet What's Best bei jeder Iteration den Wert dieser Zelle, um eine eventuelle Verletzung der Restriktion zu überprüfen. Die zweite Zelle beinhaltet den Typ der Restriktion: Gültige Typen für Restriktionen sind „größer gleich", „kleiner gleich" oder „gleich". Die Angabe von Restriktionen der Form „echt größer" oder „echt kleiner" ist mit What's Best nicht möglich. Neben dem Typ enthält die zweite Zelle nach Durchführung der Optimierung den Zustand der Restriktion. Eine vollständige Ausschöpfung einer Restriktion wird durch Anzeige eines Gleichheitszeichens ausgedrückt. Die dritte Zelle („Right-Hand-Side", RHS) enthält für jede Restriktion den Wert, der bei einer Gleichung erfüllt sein muss. Bei Ungleichungen ist dieser Wert die obere oder untere Schranke.

Im Demo-Beispiel sind in den Zeilen sechs und sieben sowie neun und zehn Restriktionen anzugeben. Die Zellen der Spalte E beinhalten jeweils die „Left-Hand-Side". In den Zellen der Spalte F sind die Typen der Restriktionen zu speichern. Die Zellen der Spalte G enthalten die „Right-Hand-Side". Die Deklaration der Restriktion für den Faktor F_1 ist in Abb. 9 dargestellt.

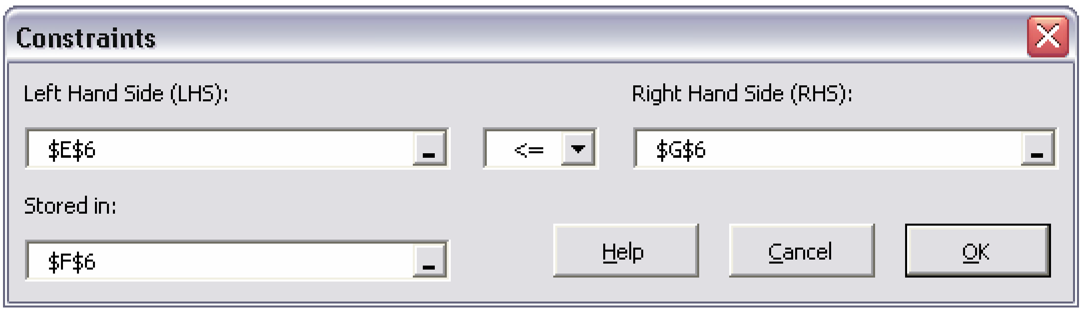

Abb. 9: Deklaration von Restriktionen

Restriktionen können durch Auswahl der Option „None" im Dialog entfernt werden. Neben der Deklaration von Restriktionen können mit What's Best Dualwerte angezeigt werden. Dualwerte werden häufig als „Schattenpreise" bezeichnet.[2] Sie geben die relative Änderung der Zielfunktion bei marginaler Ausweitung oder Einschränkung einer Restriktion an. So

1 What's Best ermöglicht auch die Lösung eines LP-Modells ohne Angabe einer Optimierungsvorschrift. In diesem Fall wird die erste Lösung als Ergebnis ausgegeben, die alle Restriktionen erfüllt.

2 Vgl. Adam, D. (1996), S. 465, Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (1997), S. 79 ff.

beschreibt z. B. der Dualwert einer Faktorrestriktion, um welchen Betrag der Deckungsbeitrag bei einer Erhöhung der Faktormenge um eins ansteigt. Dualwerte weisen nur dann einen von null verschiedenen Wert auf, wenn ein Engpass vorliegt, also die Restriktion ausgeschöpft ist.[1]

Für die Deklaration von Dualwerten in What's Best ist zunächst anzugeben, in welcher Zelle diese angezeigt werden („Report Information in"). Anschließend wird eine weitere Zelle ausgewählt („For Cell Range"), in der die für den Dualwert relevante Restriktion enthalten ist. Über die Auswahl der Optionen „Upper Range" und „Lower Range" für die Eigenschaft „Report on Type" kann in weiteren Zellen dargestellt werden, in welchem Intervall der Dualwert gültig ist.

Im Demo-Beispiel können für die Restriktionen in den Zeilen sechs und sieben sowie neun und zehn Dualwerte angegeben werden. Als „Cell Range" sind die in der Spalte F enthaltenen Zellen auszuwählen. Die Dualwerte werden in der Spalte H ausgewiesen. Die Deklaration des Dualwerts für die Restriktion für den Faktor F_1 ist in Abb. 10 dargestellt.

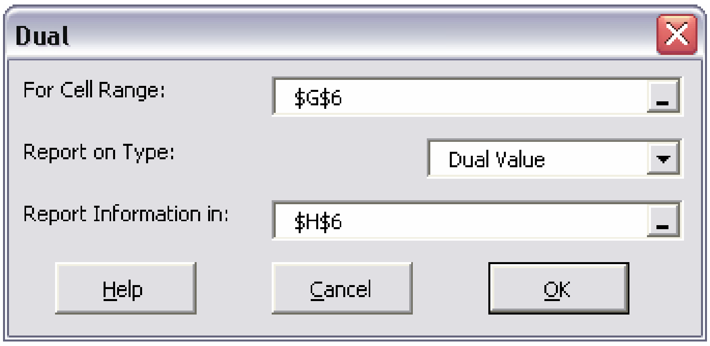

Abb. 10: Ausgabe von Dualwerten

Auch bei ganzzahligen Variablen sind Dualwerte bei What's Best nur dann von null verschieden, wenn die Restriktion voll ausgeschöpft ist. Bei der optimalen Lösung ganzzahliger LP-Modelle weichen die durch Restriktionen beschränkten Werte häufig nur um eins von der Restriktionsgrenze ab. Obwohl eine Veränderung der Grenze auch den Zielwert verbessern würde, wird ein Dualwert von null angezeigt.

Optimierung des LP-Modells

Nach der Festlegung der Restriktionen kann das LP-Problem optimiert werden. Hierfür sind in What's Best unterschiedliche Algorithmen implementiert. In Abhängigkeit der Problemstruktur wählt die Software selbstständig einen geeigneten Algorithmus aus.[2] Im Falle nicht-

---

1 Vgl. Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (1997), S. 81.

2 Durch Modifikation der Standardeinstellung der Software ist es möglich, den Optimierungsalgorithmus individuell festzulegen.

linearer Probleme nimmt What's Best zunächst eine Linearisierung der Optimierungsvorschrift vor. Nach der Optimierung wird ein Ergebnisbericht angezeigt. Der Bericht beinhaltet eine Übersicht, in der neben weiteren Kennzahlen der Lösungszustand angezeigt wird. Abb. 11 enthält die möglichen Zustände mit ihrer Bedeutung.[1]

Zustand	Bedeutung
Globally Optimal	Dieser Zustand drückt das Erreichen der optimalen Lösung aus, die gleichzeitig alle Restriktionen des Modells erfüllt.
No Feasible Solution Found	Dieser Zustand drückt aus, dass keine Lösung gefunden wurde, die alle Restriktionen erfüllt.
Unbounded	In diesem Zustand existiert keine endliche optimale Lösung. Ggf. sind die Restriktionen anzupassen.
Numerical Error	Dieser Zustand wird ausgegeben, falls bei der Optimierung ein Rechenfehler aufgetreten ist. Er wird z. B. bei einer Division durch null erreicht.

Abb. 11: Übersicht der Endzustände der Algorithmen

Neben dem *Bericht* werden die (optimalen) Belegungen der Variablen, der Zielfunktion, der Restriktionen sowie der Dualwerte im Spreadsheet des Modells angezeigt. Auch bei Nicht-Erreichen eines optimalen Zustands werden die Ergebnisse dokumentiert. Vor einer Weiterverwendung der Ausprägungen im Entscheidungsprozess sollte daher auf jeden Fall der Endzustand des Lösungsalgorithmus überprüft werden.

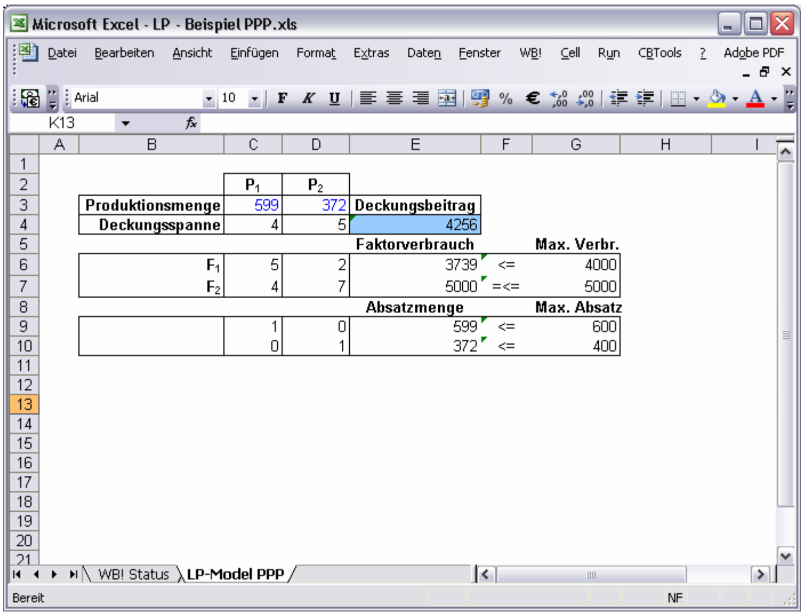

Abb. 12: LP-Modell nach der Optimierung

[1] Neben den aufgeführten Zuständen existiert eine Reihe weiterer Zustände, die bei der Lösung nicht-linearer Probleme erreicht werden. Eine Beschreibung dieser Zustände findet sich in der Dokumentation von What's Best.

Der Zustand nach der Optimierung des LP-Modells des Demo-Beispiels ist in Abb. 12 dargestellt. Der maximal erzielbare Deckungsbeitrag beträgt 4.256 € bei Produktionsmengen von 599 Stück für P_1 und 372 Stück für P_2. Die Restriktionen für den Faktor F_2 sowie die Absatzmenge des Produkts P_1 stellen die Engpässe des LP-Modells dar.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Arbeitsbericht wurde die Optimierung von LP-Modellen mit dem PC-Werkzeug What’s Best dargestellt. Zunächst wurden verschiedene Werkzeuge zur Linearen Programmierung in einer Übersicht vorgestellt und What’s Best ausgewählt. Im nächsten Schritt wurde ein erweitertes Vorgehensmodell zur Anwendung von What’s Best eingeführt. Die Anwendung des Vorgehensmodells wurde anhand eines Demo-Beispiels illustriert.

Neben der Optimierung einfacher LP-Modelle (vgl. Demo-Fall) können mit What’s Best auch komplexere Problemstellungen der Linearen Programmierung gelöst werden. So können beispielsweise Investitionsentscheidungen auf Basis Vollständiger Finanzpläne (VOFI) in Form eines LP-Modells abgebildet werden, um anschließend mit What’s Best optimiert zu werden.

Literatur

Adam, D. (1996), Planung und Entscheidung: Modelle - Ziele - Methoden, Wiesbaden 1996.

Dantzig, G. B. (1949), Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, In: Activity Analysis of Production and Allocation. Hrsg.: Koopmans, T. C. Chicago, S. 339-347.

Grob, H. L., Einführung in die Investitionsrechnung – Eine Fallstudiengeschichte, 5., vollst. überarb. u. erw. Aufl., München 2006.

Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (1997), Operations-Research: Einführung, München 1997.