MICHAEL BOSTELMANN
mail@mbostelmann.de

Hüllkurven – Fadenbilder analysieren mit Derive

1. Fadenbilder erzeugen

Auf eine Korkfliese wird ein Koordinatensystem geklebt und in die natürlichen Zahlen auf den Achsen kleine Nägel gesteckt. Anschließend wird ein Faden in (0/10) befestigt und dann in der Reihenfolge

(0/10)->(0/0)->(1/0) ->(0/9)->(0/8)->(2/0) ... (10/0)

um die Nägel geführt.

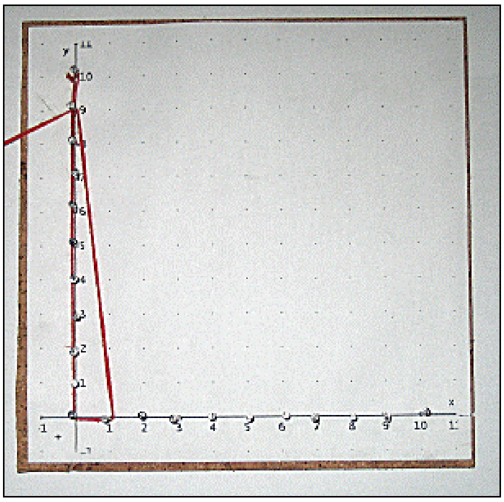

Abb.1 Anfang

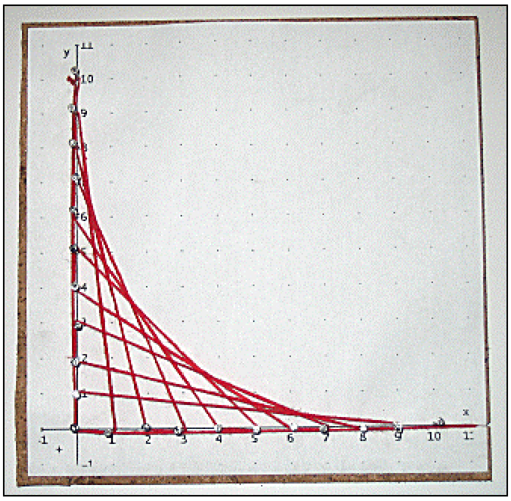

Abb.2 Fertig

Das Fadenbild soll nun mit Derive als Grafik erzeugt werden. Dazu müssen im 2D-Grafikfenster folgende Einstellungen vorgenommen werden:

Einstellen – Zeichenbereich - Minimum/Maximum: x: -1 , 11 , 12 / y: -1 , 11 , 12
Einstellen - Verzerrungsverhältnis: 1 : 1
Extras - Vereinfachen vor dem Zeichnen
Extras – Anzeige – Punkte – Verbinden: ja
Extras – Anzeige – Punkte – Farbe: rot (Farbe neuer Graphen nicht ändern)

Mit dem Vektorbefehl kann man dann einen Streckenzug erzeugen.

$$\text{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} 0 & 10 - t \\ t & 0 \end{bmatrix}, t, 0, 10\right)$$

Es ergibt sich folgendes Bild:

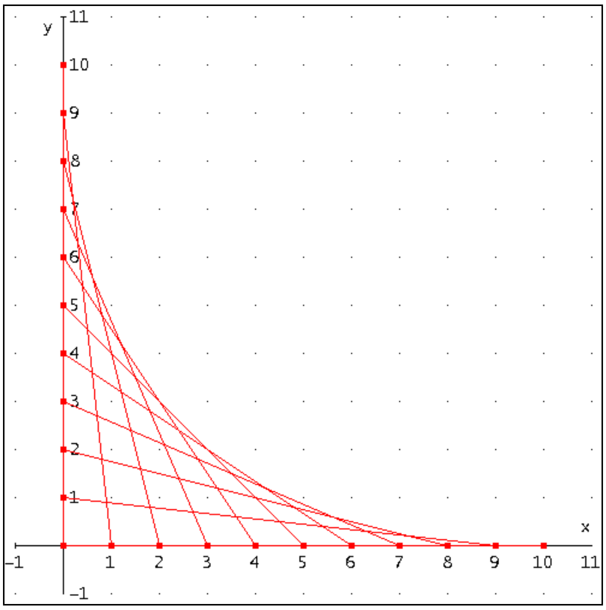

Abb.3 Fadenbild mit Derive

Mit folgendem Befehl erreicht man eine feinere Rasterung:

$$\mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} 0 & 10 - t \\ t & 0 \end{bmatrix}, t, 0, 10, 0.2\right)$$

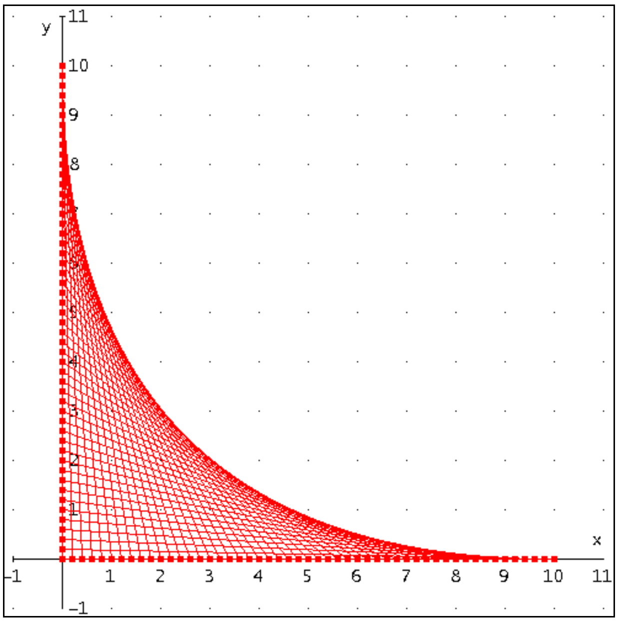

Abb.4 Fadenbild mit Derive (fein)

2. Darstellung durch eine Geradenschar

Während bisher Derive genau dasselbe gemacht hat wie wir mit den Fäden, nämlich einen Streckenzug erzeugt, soll das Bild nun durch eine Geradenschar erzeugt werden. Als Parameter dieser Schar soll der y-Achsenabschnitt dienen. Es gilt dann

$$\boxed{y_t = \frac{t}{t-10} \cdot x + t}$$

Oder mit Derive als Funktion s(x,t):

$$s(x,\ t) := \frac{t}{t - 10} \cdot x + t$$

Wir erzeugen eine entsprechende Kurvenschar mit

```
VECTOR(s(x, t), t, 0, 10, 0.2)
```

und erhalten das Bild

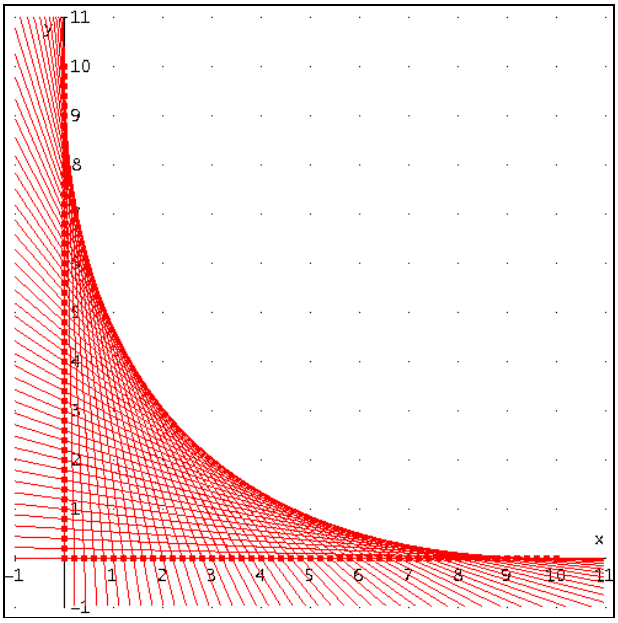

Abb.5 Fadenbild als Geradenschar

Man erkennt deutlich einen Rand, der den ersten Quadrant in ein Gebiet ohne Geraden und eines mit Geraden trennt – die Hüllkurve.

3. Approximation der Hüllkurve durch Schnittpunkte

Als Näherung der Hüllkurve können wir die Schnittpunkte benachbarter Geraden in Abb.3 benutzen[1]. Dazu lösen wir die Gleichung s(x,t)=s(x,t+1) und erhalten so die x-Koordinate des Schnittpunktes in Abhängigkeit von t. Anschließend erzeugen wir eine Punkteliste für t=0..9 .

```
SOLVE(s(x, t) = s(x, t + 1), x)
```

$$x = \frac{(t - 9)\cdot(t - 10)}{10}$$

$$p(t) := \frac{(t - 9)\cdot(t - 10)}{10}$$

```
VECTOR([p(t), s(p(t), t)], t, 0, 9)
```

und erhalten folgendes Bild

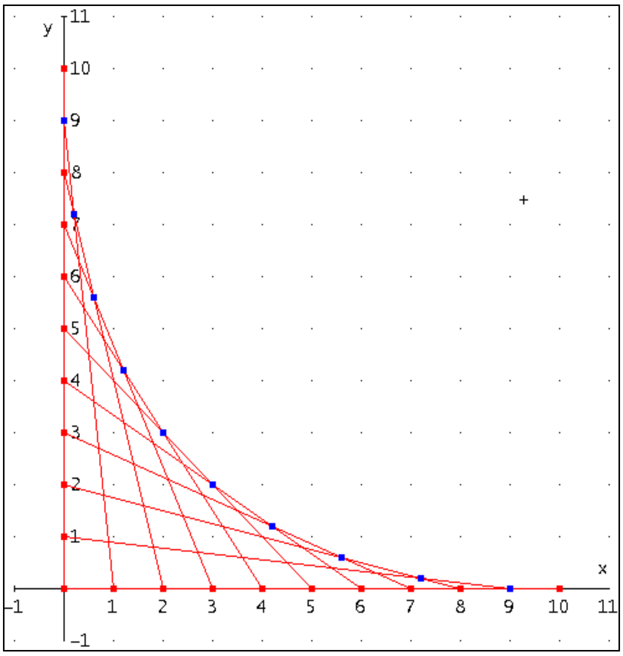

Abb.6 Fadenbild mit Schnittpunkten

Verfeinert man nun wieder das Bild und untersucht die Schnittpunkte benachbarter Geraden mit der Differenz h der Parameter, so ergibt sich

---

[1] Dank an Benno für den Tipp

SOLVE(s(x, t) = s(x, t + h), x)

$$x = \frac{(h + t - 10)\cdot(t - 10)}{10} \vee h = 0$$

Für sehr kleine h bzw. für h gegen Null erhält man also $x = \frac{(t-10)(t-10)}{10}$

Damit erhält man eine Parameterdarstellung der Hüllkurve

$$q(t) := \frac{(t - 10)\cdot(t - 10)}{10}$$

[q(t), s(q(t), t)]

Diese lässt sich in dieser Form zeichnen nachdem man in die richtigen Werte für t eingestellt hat:

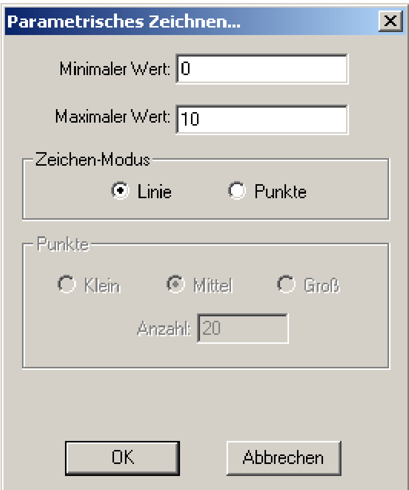

Abb.7 Einstellung des Parameters

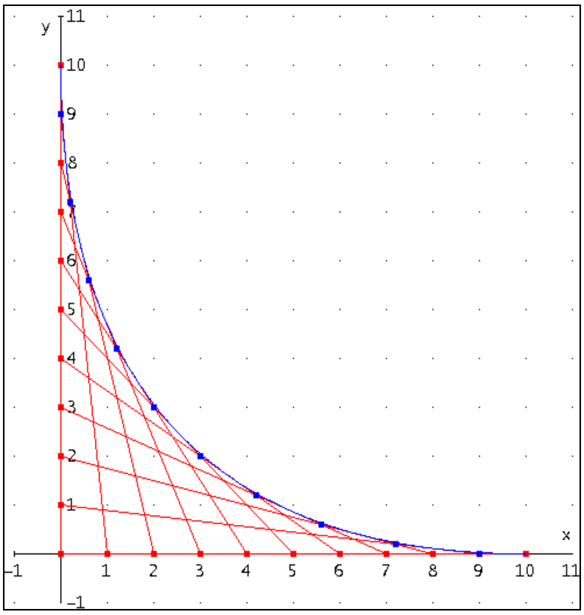

Abb.8 Fadenbild mit Hüllkurve

Aus der Parameterform wird nun noch die Koordinatenform hergeleitet:

SOLVE(q(t) = x, t)

$$t = \sqrt{10}\cdot(\sqrt{10} - \sqrt{x}) \vee t = \sqrt{10}\cdot(\sqrt{x} + \sqrt{10})$$

Da t und x bei unserem Fadenbild im Intervall [0;10] liegen sollte die erste Lösung für uns in Frage kommen. Wir zeichnen trotzdem beide Lösungen ein.

$t1 := \sqrt{10}\cdot(\sqrt{10} - \sqrt{x})$

$t2 := \sqrt{10}\cdot(\sqrt{10} + \sqrt{x})$

$s(x,\ t1)$

$$x - 2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{x} + 10$$

$s(x,\ t2)$

$$x + 2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{x} + 10$$

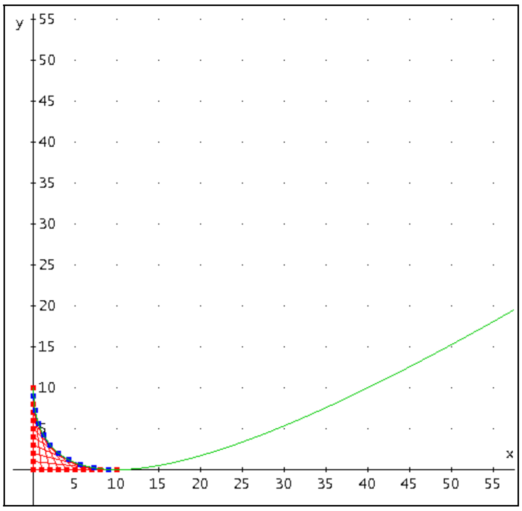

Abb.9 Kurve zur Lösung t1

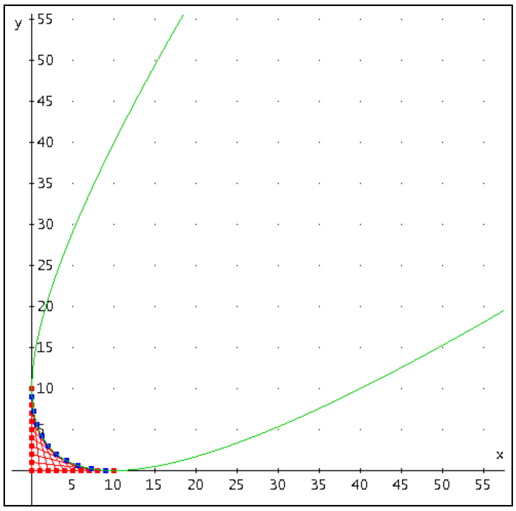

Abb.10 Kurven zu den Lösungen t1 und t2

Die Hüllkurve, die durch unser Fadenbild beschrieben wird hat also die Gleichung

$$h(x) = x - 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{x} + 10 \qquad ; \qquad 0 \le x \le 10$$

4. Herleitung der Hüllkurve mit Hilfe von Tangenten

Da oberhalb der Hüllkurve keine Geraden der Schar verlaufen, bilden diese die Menge der Tangenten an die Hüllkurve.

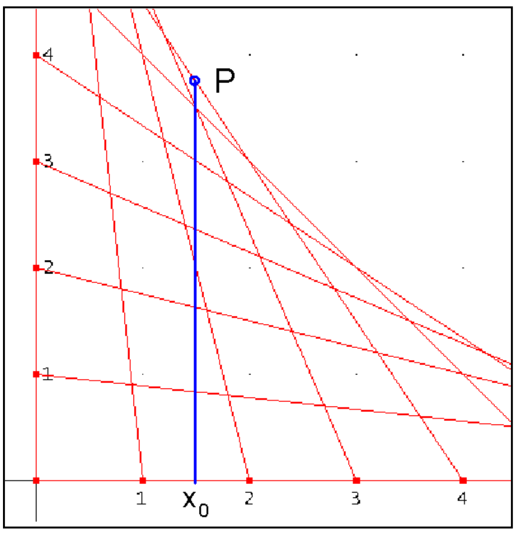

Abb.11 Finden der Tangente

Geht man von einer Stelle x_0 auf der x-Achse nach oben, so ist die Tangente an die Hüllkurve im Punkt P die letzte Gerade der Schar, die man noch erreicht, bevor man in das geradenfreie Gebiet jenseits von P kommt. Die Tangente an der Stelle x_0 ist also die Gerade der Schar, die an dieser Stelle den höchsten

Wert hat. Gesucht ist also der Hochpunkt der Funktion s(x,t) in Abhängigkeit von t. Diesen findet man mit Hilfe der Differenzialrechnung.

$$s1(x,\ t) := \frac{d}{dt}\, s(x,\ t)$$

$$s1(x,\ t) := 1 - \frac{10 \cdot x}{(t - 10)^2}$$

$$\mathrm{SOLVE}(s1(x,\ t) = 0,\ t)$$

$$t = \sqrt{10} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{x}) \vee t = \sqrt{10} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{10})$$

Damit haben wir das gleiche Ergebnis wie der Schnittpunktbetrachtung.

5. Untersuchung der Hüllkurve

Abb.10 legt die Vermutung nahe, dass die Hüllkurve symmetrisch zur Winkelhalbierenden ist, möglicherweise sogar eine Parabel. Dies lässt sich an dem Funktionsterm nicht so ohne Weiteres ablesen. Hilfreich wäre es, wenn wir die Hüllkurve um 45° nach links drehen würden. Fassen wir den Graphen als Punktmenge Q[r / h(r)] mit $0 \leq r \leq 10$ auf, dann können wir auf die Ortsvektoren die Drehmatrix $m = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ mit $\varphi = 45°$ anwenden, also $m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Für die folgenden Berechnungen sollte der Variablenbereich im Menü Schreiben/Variablenbereich für x und r auf [0; 10] gesetzt werden.

$$h(x) := x - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{x} + 10$$

$$x :\in \mathrm{Real}\ [0,\ 10]$$

$$r :\in \mathrm{Real}\ [0,\ 10]$$

$$m := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m \cdot [r,\ h(r)]$$

$$[2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{r} - 5 \cdot \sqrt{2},\ \sqrt{2} \cdot r - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{r} + 5 \cdot \sqrt{2}]$$

Dies ist wieder eine Parameterdarstellung der gedrehten Kurve. Um daraus die Koordinatenform herzuleiten, setzen wir die erste Komponente gleich x und lösen nach r auf. Mit diesem Term, der von x abhängt, substituieren wir dann das r in der zweiten Komponente.

$$\mathrm{SOLVE}(x = 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{r} - 5\cdot\sqrt{2},\ r)$$

$$r = \frac{(x + 5\cdot\sqrt{2})^2}{20}$$

$$\mathrm{SUBST}\left(\sqrt{2}\cdot r - 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{r} + 5\cdot\sqrt{2},\ r,\ \frac{(x + 5\cdot\sqrt{2})^2}{20}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot x^2}{20} + \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}$$

An der Koordinatenform sieht man nun, dass es sich tatsächlich um eine Parabel handelt.

6. Verallgemeinerung

Hätten wir bei unserem Fadenbild vom Anfang die Nägel nicht in die Achsen sondern in die Winkelhalbierenden gesteckt, dann hätte sich direkt die zur y-Achse symmetrische Parabel ergeben. Wir verallgemeinern diesen Fall noch, indem wir statt der Winkelhalbierenden allgemein die Geraden $y=a\cdot x$ und $y=-a\cdot x$ betrachten. Der Parameter t beschreibt die x-Koordinate des Punktes P_2 auf der Geraden $y=a\cdot x$ und bewegt sich zwischen 0 und 10.

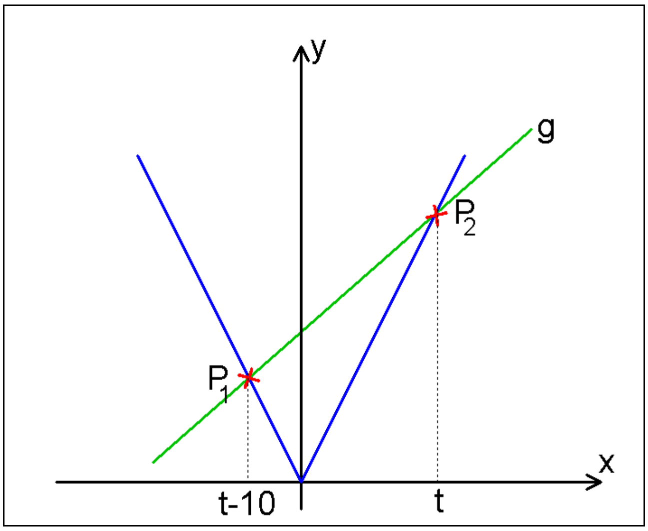

Abb.12 Aufstellen der Geradengleichung

Zunächst bestimmen wir die Geradengleichung g(x,t,a):

$$y1(x) := -a\cdot x$$

$$y2(x) := a\cdot x$$

$$x :\in \text{Real } [-10,\ 10]$$

$$t :\in \text{Real } [0,\ 10]$$

$$m := \frac{y2(t) - y1(t - 10)}{10}$$

$$m := \frac{a\cdot(t - 5)}{5}$$

$$\text{SOLVE}\left(a\cdot t = \frac{a\cdot(t - 5)}{5}\cdot t + b,\ b\right)$$

$$b = \frac{a\cdot t\cdot(10 - t)}{5}$$

$$g(x,\ t,\ a) := \frac{a\cdot(t - 5)}{5}\cdot x + \frac{a\cdot t\cdot(10 - t)}{5}$$

Anschließend bestimmen wir die Hüllkurve

- Nach der Schnittpunktmethode

$$\text{SOLVE}(g(x,\ t + h,\ a) = g(x,\ t,\ a),\ t)$$

$$t = \frac{x - h + 10}{2} \lor a = 0 \lor h = 0$$

$$g\left(x,\ \frac{x + 10}{2},\ a\right)$$

$$\frac{a\cdot(x^2 + 100)}{20}$$

- Nach der Tangentenmethode

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{d}{dt}\,g(x,\ t,\ a) = 0,\ t\right)$$

$$t = \frac{x + 10}{2} \vee a = 0$$

$$g\left(x,\ \frac{x + 10}{2},\ a\right)$$

$$\frac{a\cdot(x^2 + 100)}{20}$$

Es handelt sich also um eine zur y-Achse symmetrische Parabel.

Den Parameter a kann man bei der grafischen Darstellung mit einem Schieberegler steuern.

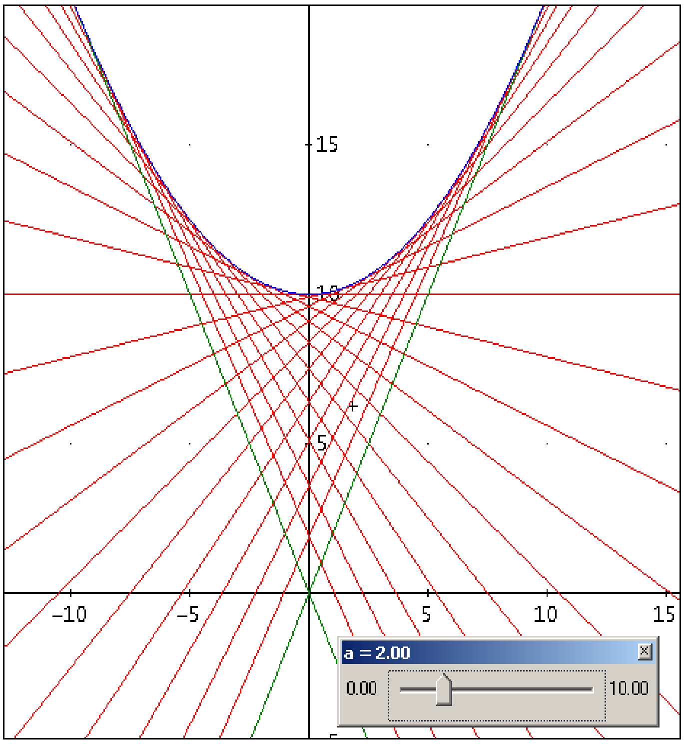

Abb.12 Geradenschar und Hüllkurve mit Schieberegler