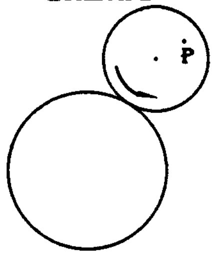
Andreas Schenker

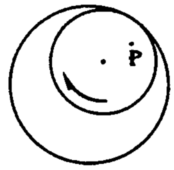
Rollkurven

Themenbereich	
Trigonometrie, Parameterdarstellung	
Inhalte	Ziele
• Konstruktion von Rollkurven • Animationen • Parameterdarstellung von rollkurven	• Beschreiben der Rollkurven mit Hilfe von Funktionen • Überprüfen von Funktionen

ZYKLOIDE



EPIZYKLOIDE



HYPOZYKLOID

Rollkurven entstehen, wenn ein Kreis entlang einer Linie abrollt und dabei nicht «rutscht», d.h., der Kreis rollt ohne Schlupf. Ein mit dem rollenden Kreis fest verbundener Punkt beschreibt dann eine Rollkurve. Dieser Punkt muss nicht notwendigerweise auf der Peripherie dieses Kreises liegen und hat für die weitere Diskussion den Abstand c vom Zentrum des rollenden Kreises (mit Radius r2).
Solche Kurven lassen sich mittels eines Spirographen oder mit Fischer-Technik (Zahnräder, Zahnstangen) erzeugen.
Ist die Linie, auf der abgerollt wird, eine Gerade, so heisst die entstehende Kurve Zykloide. Ist diese Linie selbst ein Kreis (vom Radius r1), entsteht, falls der bewegliche Kreis aussen herum abrollt, eine sogenannte Epizykloide, falls er innen herum abrollt, eine Hypozykloide. Man nennt die Zykloiden «verschlungen», falls $c > r2$, «gewöhnlich» für den Fall $c = r2$ und «gestreckt» für $c < r2$.

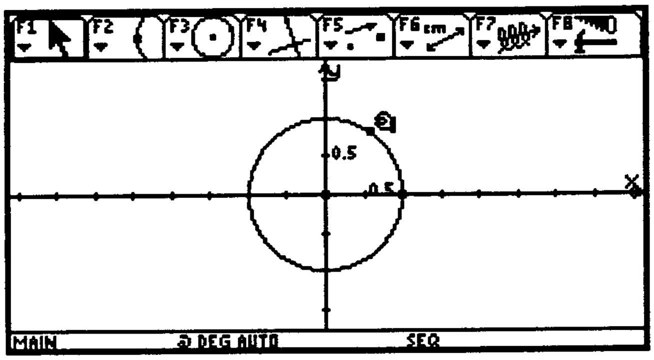
Das Thema wird mit unterschiedlichen Methoden angegangen. Dabei werden verschiedene Applikationen des TI–92 zur gegenseitigen Zusammenarbeit genutzt. Das vorliegende Beispiel ist deshalb auch zur Demonstration der Vielseitigkeit des TI–92 im Rahmen von Fortbildungsveranstaltungen geeignet.

	TI–92-Anwendung
• Konstruktion einer Epizykloide mit $r1 = 1$, $r2 = 0.5$, $c = 0.75$	**Geometry**
• Aufnahme der Koordinaten der Kurvenpunkte in eine Tabelle	**Data/Matrix Editor**
• Zeichnen der Epizykloide aus den Punktkoordinaten	**Graph**
• Herleiten der Parametergleichung für die Epizykloide	**Ohne Hilfsmittel**
• Kontrolle der Parametergleichung durch Überdecken des Graphen aus den Punktkoordinaten mit der Kurve in Parameterdarstellung	**Graph**

Lösungsskizzen

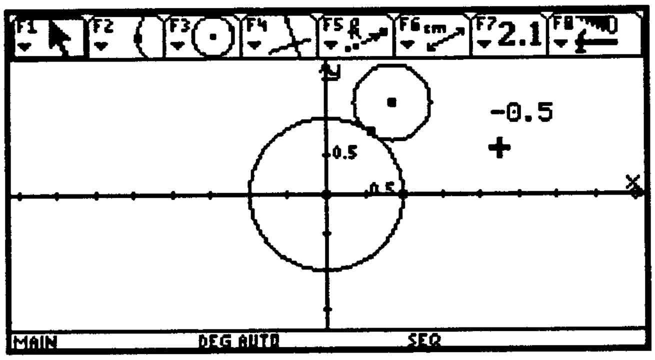
1. Anwendung «Geometry»

Drücken Sie die APPS-Taste, und wählen Sie im Menü die Anwendung `Geometry`.
Mit dem F8-Menü stellen wir nun im Dialogfenster des `Format...` - Befehls `Coordinate Axes` auf `RECTANGULAR`.

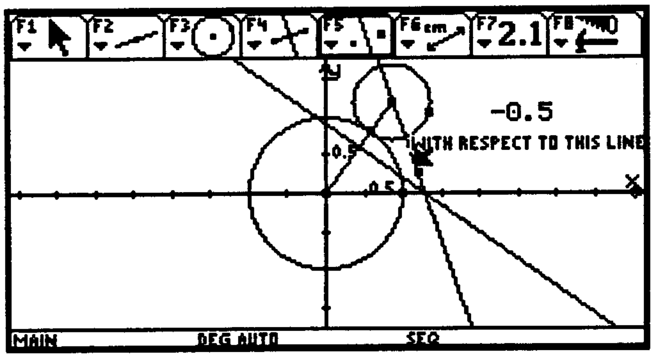


Zeichnen Sie nun den Einheitskreis und auf seiner Peripherie einen Punkt. Dieser Punkt kann auf der Kreislinie frei bewegt werden.

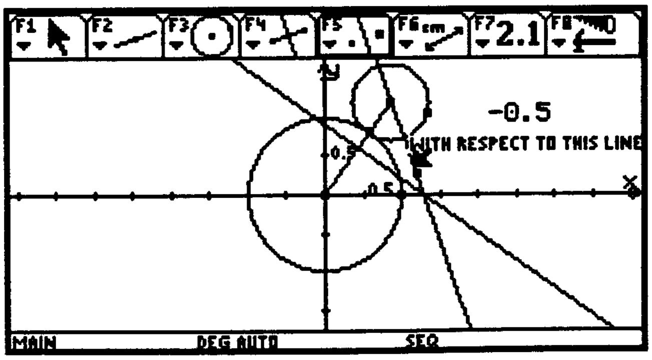
Er wird zum Berührungspunkt des auf dem Einheitskreis rollenden Kreises mit dem Radius r2 = 0.5. Sie konstruieren ihn, indem Sie den Einheitskreis am Berührungspunkt mit dem Faktor –0.5 strecken. Zu diesem Zweck müssen Sie zuerst den Streckungsfaktor eingeben: `F7 Numerical Edit`.
Die Streckung führen Sie mit `F5 Dilation` und der Anwahl des Einheitskreises, des Berührungspunktes und des Streckungsfaktors durch.



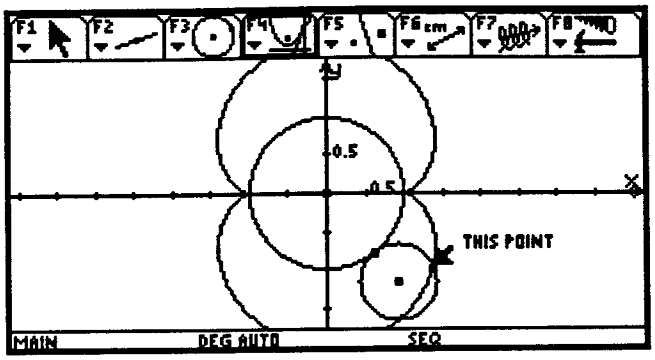
Ziehen Sie nun am Berührungspunkt und beobachten Sie, wie sich der von ihm abhängige Kreis mitbewegt. Sie können diesen Vorgang auch mit `F7 Animation` automatisieren: Wählen Sie den Berührungspunkt aus und ziehen Sie die Feder mit gedrückter Hand-Taste in die Gegenrichtung der beabsichtigten Bewegung und lassen sie dann los. Durch Drücken der Plus- resp. Minustaste kann die Geschwindigkeit gesteuert werden.



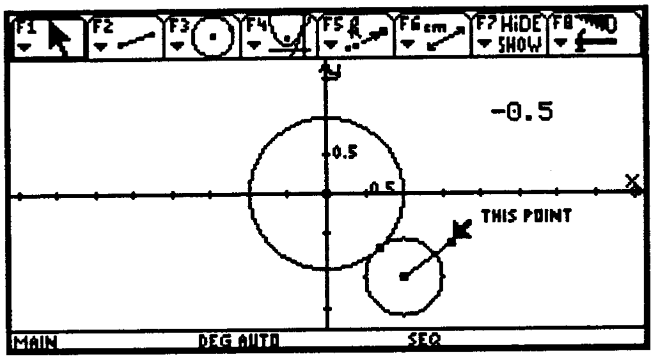
Die Schlüsselidee zur Konstruktion des mit dem rollenden Kreis fest verbundenen Punktes ist bei den Zykloiden (einschliesslich Epi- und Hypozykloide) die Tatsache, dass die abgerollten Kurvenstücke auf der Kreisperipherie wie auch auf der Rollunterlage (Gerade bei der Zykloide, Kreis von Radius r1 bei der Epi- bzw. Hypozykloide) die gleiche Länge haben.



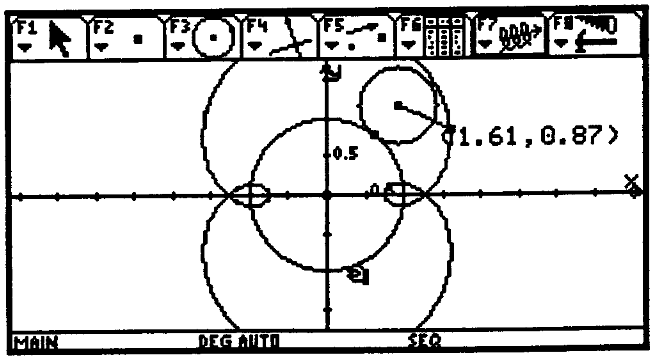
Untersuchen Sie zuerst den Fall c = r2. Dazu wird eine auf der x-Achse liegende Gerade an der Mittelsenkrechten des Zentralabstands beider Kreise gespiegelt. Damit sind die Winkel in den beiden Kreismittelpunkten gleich gross. Der zugehörige Bogen auf dem kleinen Kreis muss nun noch verdoppelt werden. Dies erreichen Sie, indem Sie den Berührungspunkt der beiden Kreise an der vorher erzeugten Bildgeraden spiegeln.



Hilfspunkte und Hilfslinien können Sie mit `F7 Hide / Show` und durch Selektieren unsichtbar machen.
Animieren Sie erneut den Berührungspunkt, und verfolgen Sie den Verlauf des auf dem rollenden Kreis liegenden Punktes.
Die dadurch beschriebene Kurve lassen Sie mit `F4 Locus` und mit anschliessendem Auswählen des festen Punktes auf dem rollenden Kreis und des Berührungspunktes beider Kreise zeichnen.
Mit `F8` können Sie im Dialogfeld Format... die Anzahl der zu errechnenden Ortslinienpunkte erhöhen, z. B.:
# of Locus Points...90.

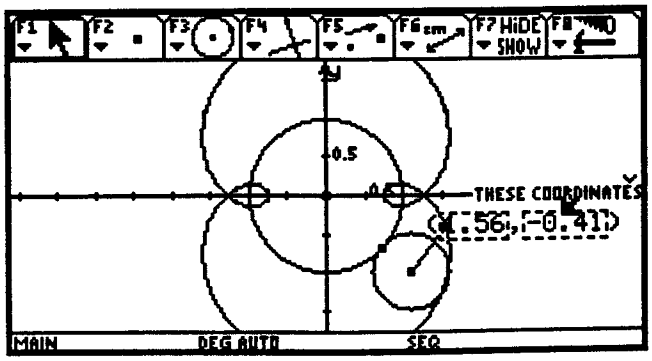


Für eine verschlungenen Epizykloide mit c = 1.5·r2 können Sie zur Konstruktion des erzeugenden Punktes den Mittelpunkt des Rollkreises am Peripheriepunkt mit dem Faktor –0.5 strecken. Die jetzt nicht mehr aktuelle Ortslinie können Sie nun löschen.



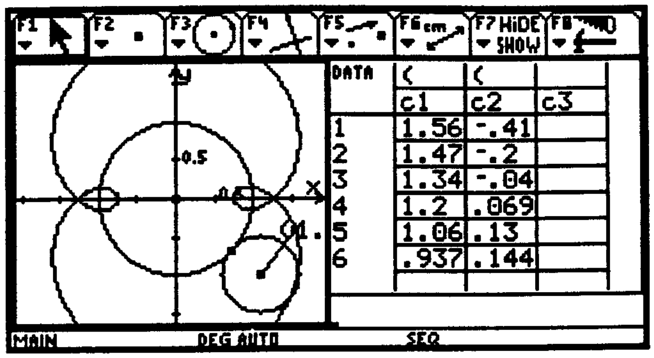
Auch für diesen Fall können Sie den rollenden Kreis animieren und die Rollkurve zeichnen lassen.

Mit dem `F6`-Menü und dem Befehl `Equation & Coordinates` werden die Koordinaten des Punktes, der die Ortslinie erzeugt, angezeigt.



Speichern Sie nun die Koordinaten von sämtlichen errechneten Ortslinienpunkten wie folgt ab:
Wählen Sie im `F6`-Menü den Unterbefehl `Define Entry` von `Collect Data`. Selektieren Sie dann die beiden Koordinaten-Label, indem Sie zuerst auf den x- und dann den y-Wert zeigen und dabei jedesmal ENTER drücken. Im `F6`-Menü aktivieren Sie anschliessend den Unterbefehl `Store Data` von `Collect Data`.

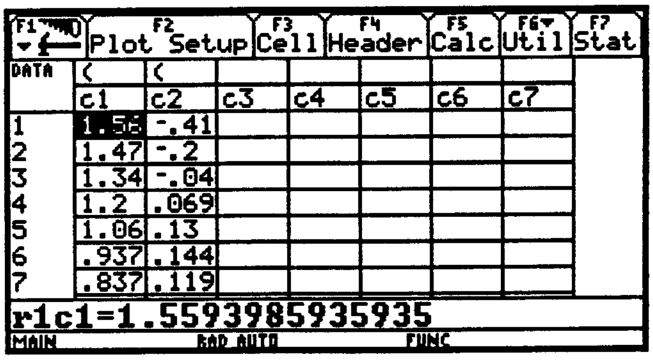
Bewegen Sie nun den Rollkreis `mit F7 Animation`, bis er wieder zum Ausgangspunkt zurückgekehrt ist. Bei dieser Aktion werden die Koordinaten aller Ortslinienpunkte automatisch eingesammelt und durch den Data/Matrix Editor in einer Variable sysdata gespeichert.



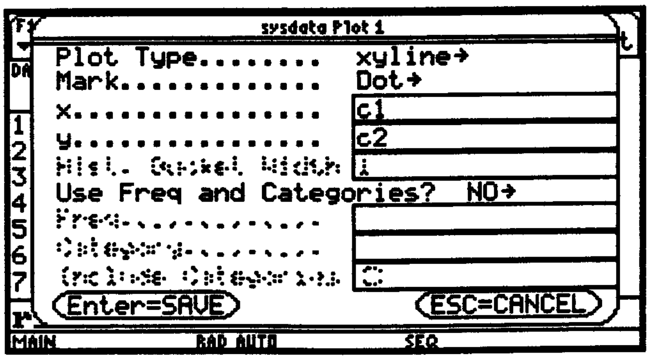
Sie können diese Daten sichtbar machen. Mit `F8 Data View` wird der Bildschirm geteilt, und es erscheint in der rechten Hälfte eine Tabelle der gesammelten Koordinaten. Mit `2ND APPS` können Sie in den Data/ Matrix Editor umschalten und sich alle Daten ansehen. Mit `2ND APPS` gelangen Sie wieder zur Anwendung Geometry und mit `F8 Clear Data View` zum ungeteilten Bildschirm zurück.

2. Anwendung «Data/Matrix Editor»

Nehmen Sie über die `MODE`-Taste im Dialogfenster folgende Einstellung vor: `Graph...FUNCTION`.
Öffnen Sie über die `APPS`-Taste in der Anwendung Data/Matrix Editor die Variable `sysdata` im Ordner main.
Sie sehen nun die Tabelle mit den vorhin eingesammelten Koordinaten. Mit diesen Daten wird eine graphische Darstellung angefertigt.

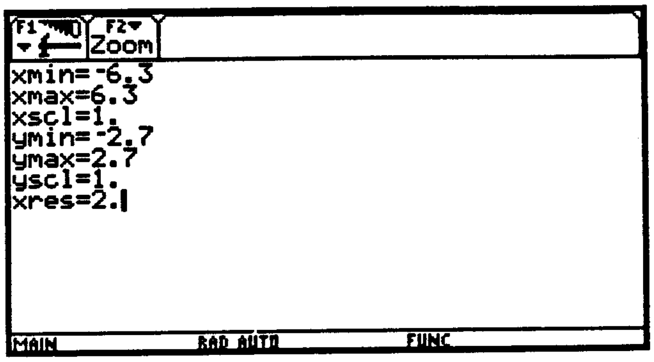


Mit `F2` für Plot Setup und anschliessend `F1` für Define erreichen Sie nebenstehendes Dialogfenster.
Nehmen Sie darin die hier angezeigten Einstellungen für Plot 1 vor. Damit bestimmen Sie die Plotart und legen fest, welche der beiden Spalten von sysdata die x-Koordinaten und welche die y-Koordinaten enthalten.

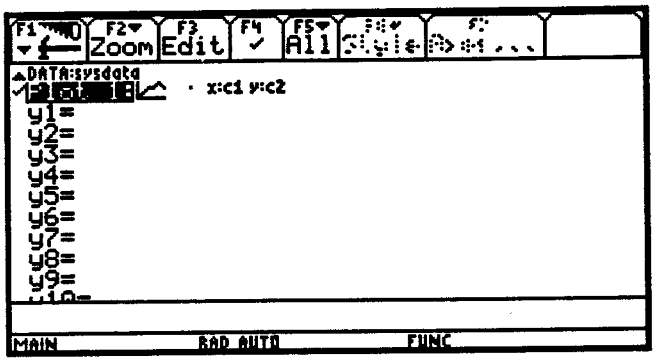


3. Anwendung «Graph»

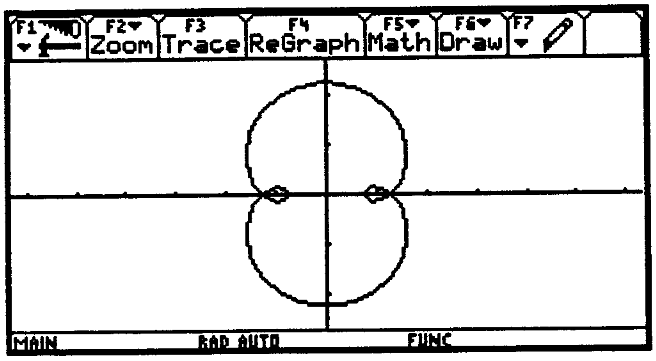
Bevor Sie in die Anwendung Graph übergehen, definieren Sie die Fensterparameter gemäss nebenstehendem Bild.
Die WINDOW-Taste führt Sie zu diesem Einstellungsfenster.



Schalten Sie nun in den Y=-Editor um.
Wenn Sie die Markierung bei y1= um eine Zeile nach oben verschieben, wird auch die Definition von Plot 1 sichtbar, die Sie vorhin vorgenommen haben und die die Zeichnung der Datenpunkte von sysdata steuert.

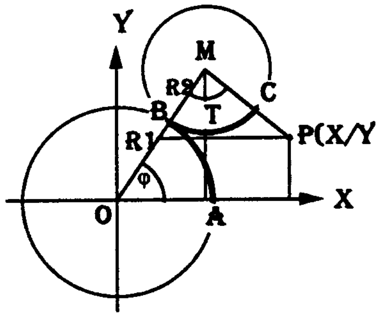


Das Betätigen der GRAPH-Taste bewirkt einen Wechsel zum Graphikfenster, in welchem nun Plot 1 ausgeführt wird.



4. Herleiten der Parametergleichung

Zur Beschreibung der bis anhin auf zwei Arten gezeichneten Rollkurve brauchen wir die Parameterdarstellung. Diese macht die x- und die y-Koordinate des Punktes P je einzeln zu einer Funktion einer neuen Variablen, dem Parameter.
Als Parameter nehmen Sie den Rollwinkel t im Bogenmass. Damit lässt sich auch der Winkel φ bestimmen, denn die beiden abgerollten Kreisbogen haben ja die gleiche Grösse:

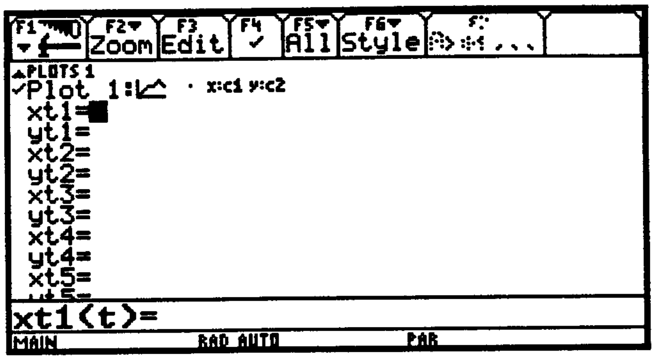


$$r1 \cdot \varphi = r2 \cdot t \Rightarrow \varphi = \frac{r2 \cdot t}{r1}$$

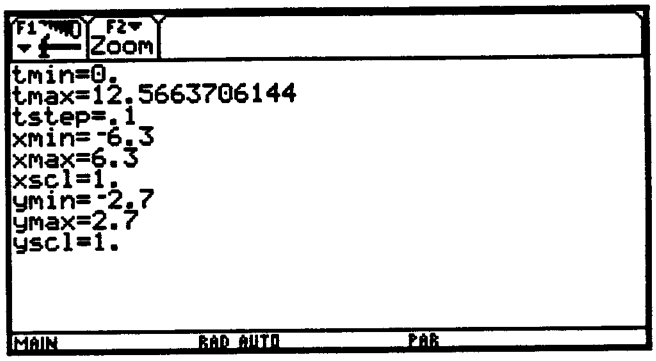
Nun lassen sich die x- und y-Koordinate von P mit Hilfe von r1, r2, c und t allgemein berechnen. Versuchen Sie diese Aufgabe selbständig zu lösen. Sie können die Lösung auf ihre Richtigkeit überprüfen, indem Sie dann im Kapitel 5 kontrollieren, ob die Kurve, die Sie mit Hilfe Ihrer Parameterdarstellung erzeugen, Plot 1 überdeckt.

5. Kontrolle der Parametergleichung mit Anwendung «Graph»

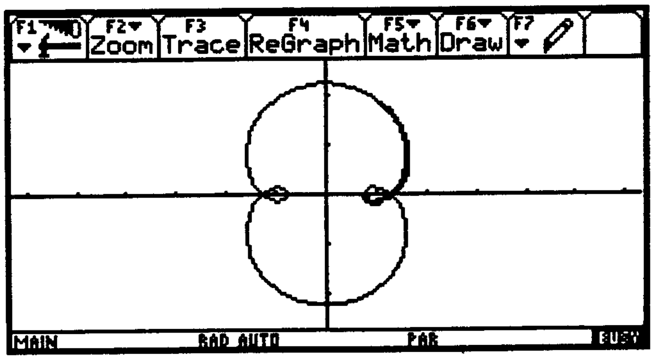
Bereiten Sie das Zeichnen der Kurve in Parameterdarstellung vor, indem Sie im `MODE`-Dialogfenster das Feld `Graph` auf `PARAMETRIC` und das Feld `Angle` auf `RADIAN` setzen.



Rufen Sie den Y=-Editor auf, und Sie stellen fest, dass Plot 1 weiterhin angezeigt wird. Geben Sie nun für `xt1` die in Kapitel 4 bestimmte Formel für die x-Koordinate und für `yt1` die Formel für die y-Koordinate ein. Hinter jeder Formel müssen Sie die aktuellen Werte für r1, r2 und c festlegen:
| r1 = 1 and r2 = 0.5 and c = 0.75.
Einfacher ist es, wenn Sie diese Werte im Home-Fenster abspeichern. Sie müssen dann die Eingabe oder evtl. Änderungen nur einmal vornehmen. Für die Kurve in Parameterdarstellung wählen Sie `F6 Style Thick`.



Im Window-Editor sind dann die nebenstehenden Einstellungen vorzunehmen. Damit die Kurve geschlossen wird, müssen die Schranken von t bei 0 und 4*¹ liegen.



Mit der `GRAPH`-Taste wechseln Sie zum Graphik-Fenster. Falls Ihnen beim Bestimmen der Parametergleichung keine Fehler unterlaufen sind, sollten sich die beiden Kurven decken. Sonst überprüfen Sie Ihre Gleichungen und nehmen die entsprechenden Änderungen im Y=-Editor vor. Wenn Sie auch nach mehreren Versuchen nicht ans Ziel gekommen sind, finden Sie am Schluss dieses Artikels einen Lösungsweg.

Zusatzaufgaben und Erweiterungen

1. Experimentieren mit Epizykloiden

Für die folgenden Aufgaben benötigen Sie nur die Funktionen in Parameterdarstellung. Sie können Plot 1 im Y= Editor ausschalten. Selektieren Sie dazu `Plot 1` und wählen Sie `F4`.

Sie werden nun die Werte von r1, r2 und c manipulieren. Achten Sie darauf, dass Sie die Änderungen sowohl bei xt1 als auch yt1 durchführen, sofern Sie die Werte nicht im Home-Fenster abgespeichert haben.

Im Window-Editor müssen Sie jeweils die Schranken für den Parameter t und evtl. die Fenstereinstellungen anpassen.
1) Wählen Sie zunächst den gewöhnlichen Fall (c = r2), und das Verhältnis r2/r1 soll rational sein (z. B. 1/3).

2) Verändern Sie nun c ein wenig gegenüber dem Radius r2 (c < r2 resp. c > r2), der fest bleiben soll, so dass Sie Bilder für den gestreckten und den verschlungenen Fall erhalten.

3) Wählen Sie nun das Verhältnis r2/r1 = $1/^{1}$. Ein Rechner benutzt für ^{1} einen rationalen Näherungswert. Somit ist das Verhältnis r2/r1 = $1/^{1}$ für den Rechner immer noch rational. Verfolgen Sie trotzdem den Verlauf der Kurve, und versuchen Sie eine Aussage für nicht rationale Verhältnisse r2/r1 zu machen.

2. Weitere Versuche mit Zykloiden und Hypozykloiden

Stellen Sie auch Zykloiden und Hypozykloiden gemäss den Anleitungen im Kapitel «Lösungsskizzen» her. Experimentieren Sie mit diesen Kurven analog zu den Aufgaben 1) und 2) des vorherigen Kapitels.

Lösungsweg zur Epizykloide

Der Winkel in P beträgt: $\pi - (t + \varphi)$

analog für yt1

$$\begin{aligned}
xt1 &= (r1+r2)\cdot\cos(\varphi) + c\cdot\cos(\pi-(t+\varphi)) \\
&= (r1+r2)\cdot\cos(\varphi) - c\cdot\cos(t+\varphi) \\
&= (r1+r2)\cdot\cos\left(\frac{r2\cdot t}{r1}\right) - c\cdot\cos\left(t+\frac{r2\cdot t}{r1}\right) \\
&= (r1+r2)\cdot\cos\left(\frac{r2\cdot t}{r1}\right) - c\cdot\cos\left(\frac{r1+r2}{r1}\cdot t\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
yt1 &= (r1+r2)\cdot\sin(\varphi) - c\cdot\sin(\pi-(t+\varphi)) \\
&= (r1+r2)\cdot\sin(\varphi) - c\cdot\sin(t+\varphi) \\
&= (r1+r2)\cdot\sin\left(\frac{r2\cdot t}{r1}\right) - c\cdot\sin\left(t+\frac{r2\cdot t}{r1}\right) \\
&= (r1+r2)\cdot\sin\left(\frac{r2\cdot t}{r1}\right) - c\cdot\sin\left(\frac{r1+r2}{r1}\cdot t\right)
\end{aligned}$$

Literatur

[1] G. Schmidt, Mathematik erleben mit dem TI–92, Stromberg, 1995

[2] U. Müller / A. Schenker, Trigonometrie (Erweiterte Lehr- und Lernformen im computerunterstützten Unterricht) in: Mathematik für Maturitätsschulen Teil 2, Aarau, 1996