

Pfingsttagung 2002

Workshop 319

Heinz-Jürgen Harder

**Wie der TI-92 Plus den Mathematikunterricht in
der Sekundarstufe I verändern kann**

erstmalig veröffentlicht in:

Bärbel Barzel, Detlef Berntzen, Victor Manuel David Sendas: Neues Lernen.
Neue Medien. Viele Projekte im Land. Tagungsdokumentation. Westfälische
Wilhelms-Universität Münster. 21.-24. Mai 2002. Münster 2003 (=ZKL-
Texte Nr. 25), ISBN 3-934064-30-2

HEINZ-JÜRGEN HARDER

WIE DER TI-92 DEN MATHEMATIKUNTERRICHT IN DER SEKUNDARSTUFE I VERÄNDERN KANN

1. EINLEITUNG

Das SCHULZENTRUM FINDORFF (www.szfindorff.de) in Bremen ist ein Schulzentrum der Sekundarstufe I. Es beherbergt unter einem Dach alle Klassen von der fünften bis zur zehnten Jahrgangsstufe. Die fünfte und sechste Klasse bilden dabei die schulformunabhängige Orientierungsstufe, ab 7. Klasse sind die Schülerinnen und Schüler in Klassen der Hauptschule, der Realschule und des Gymnasiums aufgeteilt. Nachdem im Schuljahr 1995/96 eine Veränderung des naturwissenschaftlichen Unterricht ihren Anfang genommen hatte, sollte zwei Jahre später auch die Mathematik mit einbezogen werden. Im Schuljahr 1997/98 begann dann der veränderte Mathematikunterricht mit zwei Kollegen in zwei siebten Klassen des Gymnasiums. Seitdem werden alle Klassen des Gymnasiums nach diesem Modell unterrichtet. Hierfür wurden im weiteren Verlauf zusätzliche KollegInnen fortgebildet.

2. ENTWICKLUNG DER RECHNERAUSSTATTUNG AM SZ FINDORFF

Äußeres Kennzeichen der Veränderung war die Einbeziehung des modernen Taschencomputers TI-92 von Texas Instruments in den Mathematikunterricht. Die Rechner werden den Schülerinnen und Schülern von der Schule zur Verfügung gestellt. Dies bedingt eine ausreichende Recherausstattung, so dass jeder Schülerin und jedem Schüler ein Rechner für den Unterricht zur Verfügung gestellt werden kann. Außerdem sollte jede Klasse am Gymnasium nach den neuen Prinzipien unterrichtet werden. Daher wurden weitere Kolleginnen und Kollegen schulintern im Unterrichten mit dem Rechner fortgebildet.

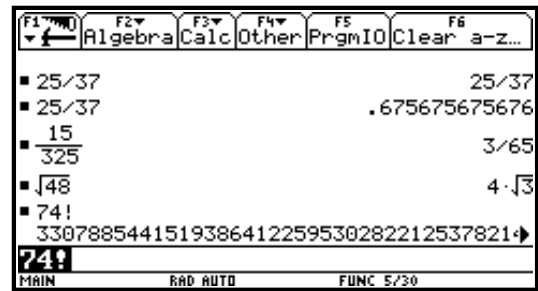
Das folgende Diagramm zeigt die Entwicklung bis zum Schuljahr 2001/02:

	44 SchülerInnen in der SII				
10. Klasse				2+1	2
9. Klasse			2	2	2
8. Klasse		2	2	2	2
7. Klasse	2	2	2	2	4
Schuljahr:	1997/98	1998/99	1999/00	2000/01	2001/02
	2 Lehrer	2 Lehrer	4 Lehrer	6 Lehrer	7 Lehrer
	2 Klassen	4 Klassen	6 Klassen	9 Klassen	10 Klassen
	25 - 30 Rechner	30 - 86 Rechner	86 - 88 Rechner	88 Rechner	92 Rechner

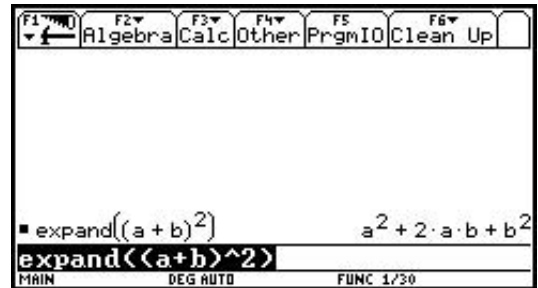
3. TECHNISCHE MÖGLICHKEITEN DES RECHNERS

Der TI-92 ist zunächst einmal auch ein ganz normaler Taschenrechner, allerdings mit deutlich mehr Funktionalität als ein herkömmlicher Taschenrechner.

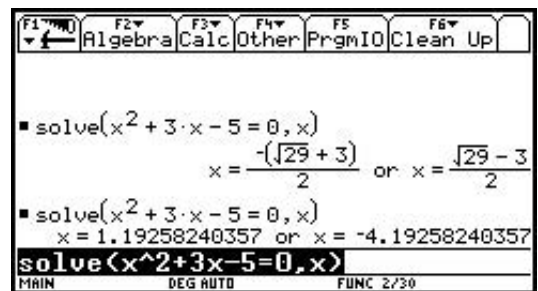
So werden Brüche exakt geschrieben, Wurzeln partiell gezogen und es können auch große Zahlen dargestellt werden.



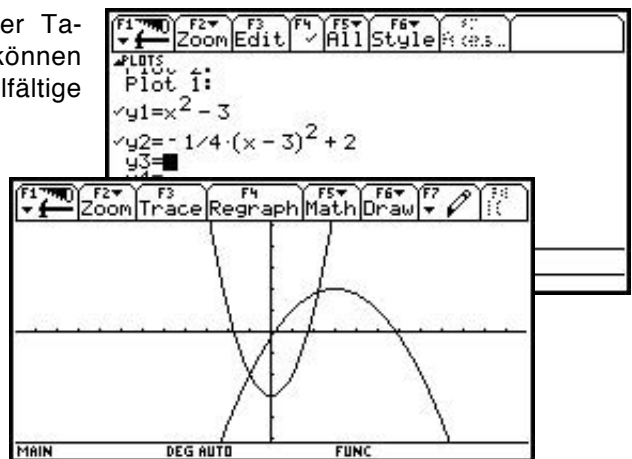
Der TI-92 besitzt ein vollwertiges Computer-Algebra-System (CAS) mit dessen Hilfe algebraische Termumformungen, wie z.B. die binomischen Formeln auflösen, auf Knopfdruck bewältigt werden können.



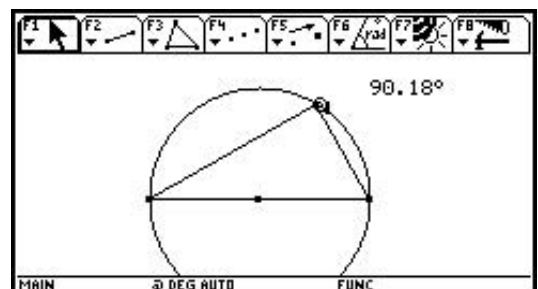
Ebenso können Gleichungen gelöst werden. Eine quadratische Gleichung wird exakt mit Wurzelausdrücken gelöst. Auf Knopfdruck können aber auch Näherungslösungen bestimmt werden.



Der TI-92 ist auch ein grafischer Taschenrechner. Funktionsgleichungen können direkt eingegeben werden und auf vielfältige Weise dargestellt und untersucht werden.



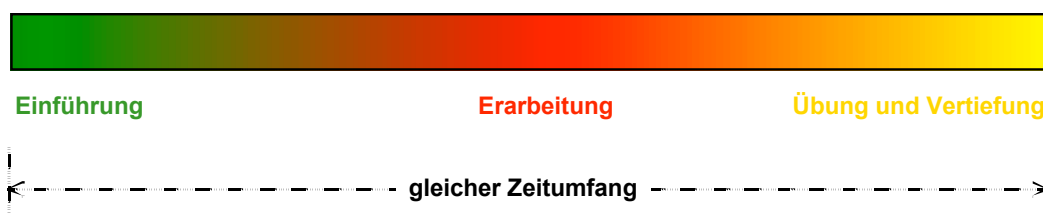
Nicht zuletzt beinhaltet der TI-92 auch die Dynamische-Geometrie-Software (DGS) "cabri géomètre". Mit ihrer Hilfe können die Schülerinnen und Schüler geometrische Zusammenhänge eigenständig erforschen.



4. AUSWIRKUNGEN DER RECHNERNUTZUNG AUF DEN UNTERRICHT

Eine traditionelle Unterrichtseinheit läuft so ab, dass man zunächst in das Thema einführt und die Schüler für den Stoff motiviert. Danach schließt sich eine Phase an, in der die neuen Inhalte erarbeitet werden. Diese neuen Inhalte werden dann am Ende der Unterrichtseinheit anhand von geeigneten Aufgaben geübt und vertieft. Das folgende Schema soll diesen Ablauf mit selbstverständlich fließenden Übergängen veranschaulichen:

Der traditionelle Ablauf einer Unterrichtseinheit:



Veränderung des Ablaufs einer Unterrichtseinheit mit dem TI-92:



Beim Einsatz des Rechners müssen diese Phasen natürlich weiterhin vorhanden sein. Dazu kommt jetzt noch der Einsatz des Rechners, bei dem noch zusätzlich für die Schülerinnen und Schüler geklärt werden muss, wie der Rechner für die Behandlung der gelernten Inhalte genutzt werden kann. Da auch der Zeitrahmen für die gesamte Unterrichtseinheiten eingehalten werden muss, verkürzt sich notwendiger Weise die Zeit für die anderen Phasen. Dieses haben wir jedoch nicht als Nachteil erfahren, sondern durch die Veränderung des Unterrichts (stärkere Eigenarbeit und Selbständigkeit der Schülerinnen und Schüler) als sehr Gewinn bringend angesehen.

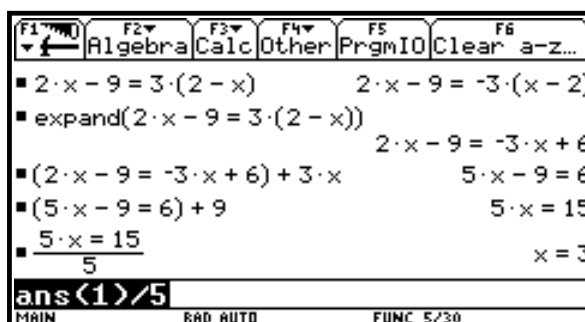
Die Rechnernutzung hat den Unterricht bei uns in drei Bereichen verändert:

- ▶ Wir nutzen ihn zur Unterstützung bei Routinearbeiten,
- ▶ zum forschenden Lernen und
- ▶ bei der Einbeziehung von neuen Inhalten in den traditionellen Unterricht der Sekundarstufe I.

5. UNTERSTÜTZUNG VON ROUTINEAUFGABEN

Die Funktion des Rechners bei der Unterstützung von Routineaufgaben soll an zwei Beispielen verdeutlicht werden:

Wenn Schülerinnen und Schüler den Lösungsalgorithmus für lineare Gleichungen lernen, so müssen sie bei Übungsaufgaben immer darauf achten, dass sie sowohl die richtigen Umformungen wählen, als auch dass sie richtig rechnen. Beim Einsatz des TI-92 können die Schülerinnen und Schüler sich alleine auf die Umformungen konzentrieren, wäh-



rend die Rechenroutinen vom TI-92 abgenommen wird.

Zudem bekommen die Schülerinnen und Schüler auch sofort eine Rückmeldung, wenn sie eine unpassende Umformung gewählt haben. Z.B. ist es ein beliebter Fehler, dass beim letzten Umformungsschritt, wenn die Gleichung lautet:

$$5x = 15$$

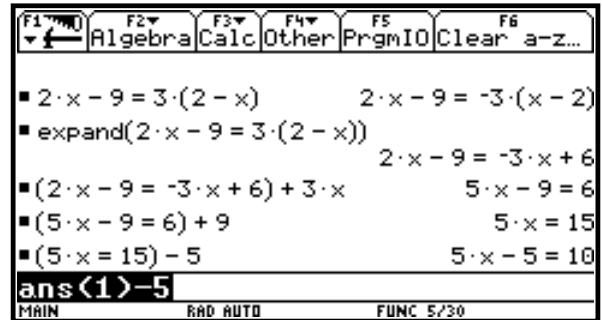
die Umformung -5 gewählt wird und die Schülerinnen und Schüler die Lösung

$$x = 10$$

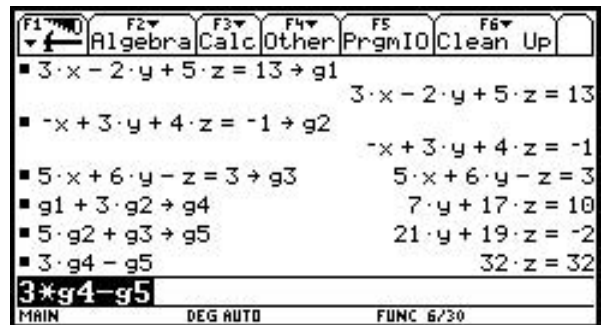
bekommen. Hierbei gibt es für die Schülerinnen und Schüler keinen Anlass an dem Ergebnis zu zweifeln. Der TI-92 reagiert natürlich sofort mit der richtigen Antwort:

$$x - 5 = 10$$

woraus die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass dieses nicht die richtige Umformung sein kann. Das zweite Bild des TI-Bildschirmes zeigt die Ausgabe eines solchen Ergebnisses.



Beim Lösen von linearen Gleichungssystemen sollen die Schülerinnen und Schüler die Operationen mit den Gleichungen lernen und nicht an den elementaren Umformungen scheitern. Daher ist es ganz wichtig, dass sie sich zunächst nur auf diese Operationen konzentrieren können und die Umformungen dem Rechner übergeben können. Das Bild rechts zeigt am Beispiel eines 3x3-Gleichungssystems einen solchen Lösungsverlauf, wie er mit dem Rechner durchgeführt wird.

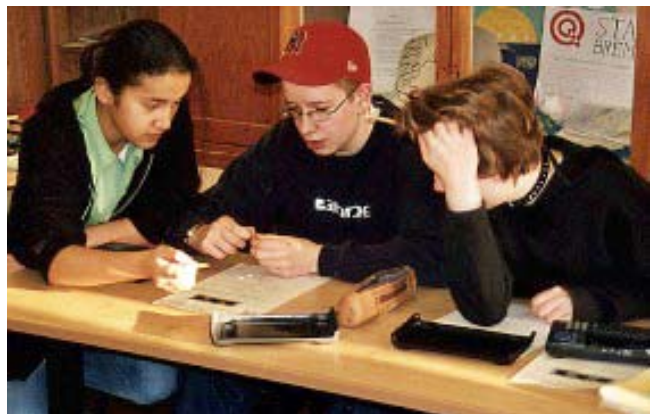


Zunächst werden die Gleichungen unter Variablen (z.B. g1, g2 und g3) abgespeichert. Auf diese Weise können dann auf einfache Weise Operationen mit Vielfachen der Gleichungen durchgeführt werden.

6. FORSCHENDES LERNEN MIT DEM TI-92

Auf der Suche nach offeneren Unterrichtsformen, die nicht nur in Übungsphasen einsetzbar sind, sondern auch dann, wenn neue Inhalte erarbeitet werden sollen, bot sich das forschende Lernen an. Das einzige, was bisher fehlte, war der mathematische Experimentierkasten, so wie man ihn aus anderen Naturwissenschaften kennt. Mit dem TI-92 glauben wir dieses Experimentiergerät gefunden zu haben.

Beim forschenden Lernen beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler intensiv mit dem zu erarbeitenden Stoff. Neben der Beschäftigung mit mathematischen Inhalten und der selbständigen Erarbeitung von Zusammenhängen sollen die Schülerinnen und Schüler an die Vorgehensweise bei der Forschungstätigkeit herangeführt werden. Sie sollen planvolle und strukturierte Arbeitsweisen erlernen, bei der sie Vermutungen über Zusammen-



hänge äußern und diese Vermutungen durch gezieltes Probieren bestätigen bzw. verwerfen. Bei dieser Handlungsweise sollen sie gezielt immer nur einen Parameter variieren lernen, um die Abhängigkeit von diesem Parameter zu untersuchen.

Schließlich sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse als mathematische Aussagen formulieren und niederschreiben. Bei der Ergebnissicherung dieser „Forschungstätigkeit“ der Schülerinnen und Schüler werden diese angehalten, am Ende einen ausführlichen „Forschungsbericht“ zu schreiben, der zum einen eine möglichst ausführliche Dokumentation ihrer Vorgehensweise und zum anderen ihre Ergebnisse enthält. Hierbei sollte auch Wert auf eine ansprechende Gestaltung des Berichtes gelegt werden, wobei zum einen die sachlich vernünftige Strukturierung, zum anderen aber auch die optische Ausführung ein Bewertungskriterium sind. Insbesondere Mädchen entwickeln dabei oft eine sehr phantasievolle Ausarbeitungen, wie auch die folgenden beiden Seiten aus einem solchen "Forschungsbericht" zeigen:



Vorschläge für Forschungsthemen in den Klassen 7 bis 10:

Klasse	Thema	Hilfsmittel
7	Geometrie des Dreiecks <ul style="list-style-type: none"> • Erkunden der Lage des Umkreismittelpunktes • Erkunden des Thaleskreises • Erkunden des gleichschenkligen Dreiecks 	DGS
	Rationale Zahlen <ul style="list-style-type: none"> • Entdecken der Rechengesetze 	TR
8	Lineare Funktionen <ul style="list-style-type: none"> • Erkunden der Bedeutung der Parameter • Iteration mit linearen Funktionen 	GTR
9	Wurzeln <ul style="list-style-type: none"> • Erkunden der Rechengesetze für Quadratwurzeln 	CAS
	Quadratische Funktionen <ul style="list-style-type: none"> • Erkunden der Bedeutung der Parameter 	GTR
	Geometrie <ul style="list-style-type: none"> • Satz des Pythagoras • Strahlensätze 	DGS

Klasse	Thema	Hilfsmittel
10	Potenzrechnung • Erkunden der Potenz-Rechengesetze	CAS
	Erkunden weiterer Funktionen • Exponentialfunktionen • Trigonometrische Funktionen	GTR

Erläuterungen:

TR: Taschenrechner (traditionell)

GTR: Grafischer Taschenrechner

CAS: Computer Algebra System

DGS: Dynamische Geometrie Software

Einen ausführlichen Bericht über das forschende Lernen mit dem TI-92 wurde in der Zeitschrift "mathematik lehren" veröffentlicht¹.

7. NEUE INHALTE IN DER SEKUNDARSTUFE I

7.1 Modellierungen

Beim Modellieren im Mathematikunterricht werden möglichst realistische Werte aus Bereichen außerhalb der Mathematik benutzt und versucht, für diese Werte mathematische Gesetzmäßigkeiten zu finden. Für die Beschaffung dieser realistischen Werte gibt es unterschiedliche Möglichkeiten.

1. Man kann diese Werte aus Büchern, Zeitschriften oder in großer Zahl aus dem Internet beschaffen.
2. Es können aber auch Werte im Unterricht aus realen Experimenten beschafft werden. In diesem Fall kann der TI-92 eine Hilfe für die Durchführung solcher Realexperimente sein, da man ihn mit Zusatzgeräten als Experimentiercomputer einsetzen kann.

In den folgenden Abschnitten gehe ich auf zwei Beispiele zu Modellierung von Realexperimenten in der 8. und 9. Klasse und ein Beispiel zur Modellierung von „Literaturwerten“ in der 10. Klasse ein.

7.1.1 „Lineare Funktionen laufen“

Für die TI-Rechner gibt ein Zusatzgerät, mit dessen Hilfe Messwerte aus naturwissenschaftlichen Experimenten aufgenommen und zur Weiterverarbeitung an den Rechner übergeben werden können. Dieses Zusatzgerät besteht aus einer Zentraleinheit dem Calculator Based Laboratory (CBL, z.Zt. in der Version CBL 2 im Handel) welches mit dem TI-Rechner verbunden wird und auf die jeweiligen Experimente abgestimmte Messfühler. Für die Aufnahme von Bewegungsvorgängen gibt es einen Ultraschall-Bewegungs-Sensor (UltraSonicMotionDetector – USMD), mit dessen Hilfe Weg-Zeit-Messungen durchgeführt werden können.



Für die Aufnahme von Bewegungsvorgängen gibt es einen Ultraschall-Bewegungs-Sensor (UltraSonicMotionDetector – USMD), mit dessen Hilfe Weg-Zeit-Messungen durchgeführt werden können.

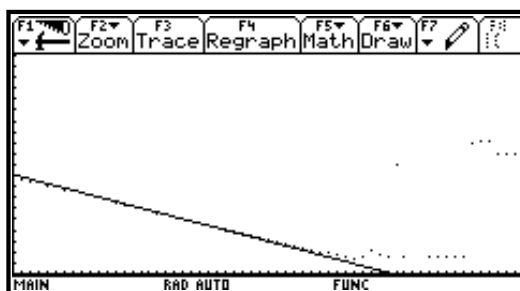
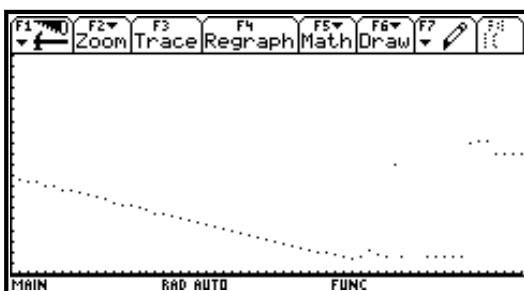
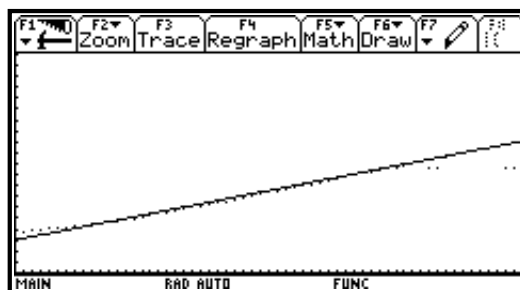
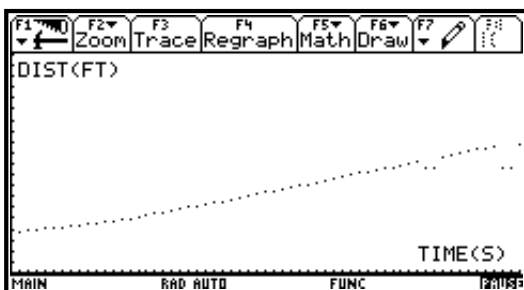
¹ Reimund Albers, Heinz-Jürgen Harder: „Forschen im Mathematikunterricht“ in „mathematik lehren“ Nr.: 104 (02.2001), Friedrich Verlag in Velber

Für ein Experiment zum Messen linearer Bewegungsvorgänge kann man den TI-92 über das Link-Kabel mit dem CBL verbinden und an diesem den USMD anschließen. Diese Anordnung wird so auf einem Tisch aufgebaut, dass vor den Ultraschall-Kopf Schülerinnen und Schüler laufen können. Auf dem TI-92 startet man ein Programm, das die Messwerte des CBL übernimmt und zur Weiterbearbeitung in Messwertlisten zur Verfügung stellt.

Wenn die Schülerinnen und Schüler schön gleichmäßig vor dem Messgerät laufen, erhält man Messreihen, bei denen die Punkte in guter Näherung auf einer Geraden liegen. Die Aufgabe besteht zunächst darin, für diese Messwertpunkte einen Graphen zu finden, der ihren Verlauf möglichst genau beschreibt. Darüber hinaus können die Ergebnisse auch noch qualitativ interpretiert werden:

- ▶ Steigung: Geschwindigkeit, mit der gelaufen wurde.
- ▶ positive Steigung: es wurde vom Messgerät weg gelaufen.
- ▶ negative Steigung: es wurde auf das Messgerät zu gelaufen.
- ▶ y-Achsenabschnitt: Entfernung des Startpunktes vom Messgerät.

Die folgenden Bilder zeigen jeweils links die auf dem TI-92 Bildschirm dargestellten Messpunkte und rechts die Überlagerung der Messpunkte durch den Graph einer linearen Funktion, mit der die Bewegung modelliert wird. Die oberen Graphen zeigen eine Bewegung vom Messgerät weg, die beiden unteren eine Bewegung auf das Messgerät zu:



Schülerinnen und Schüler können auf diese Weise die Graphen linearer Funktionen „am eigenen Leib erfahren“.

7.1.2 Eine „Wurfparabel“

Sucht man nach Lebensweltbezügen für quadratische Funktionen, so findet man in Schulbüchern² oft die geometrische Anwendung der Parabel (z.B. bei Brückenbögen), aber auch Beispiele für die beschleunigte Bewegung. Hierbei sind insbesondere Wurfbewegungen von Interesse, da in diesem Fall nicht nur das quadratische Weg-Zeit-Gesetz auftritt, sondern auch die Bahn des geworfenen Körpers eine Parabel ist. Für diesen Versuch wird das CBL mit dem TI-Rechner

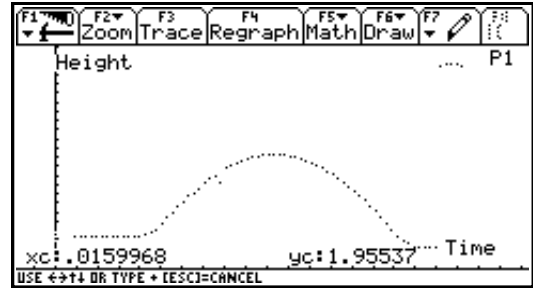


² z.B. „Schnittpunkt 9“, Klett-Verlag

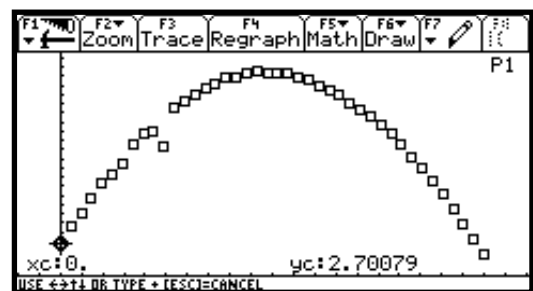
verbunden und an das CBL wird an dem Port „SONIC“ der Ultraschallentfernungsmesser (USMD) angeschlossen:

Bei der Versuchsdurchführung muss nun über dem Messfeld des USMD ein großer leichter Schaumstoffball oder besser Schaumstoffwürfel (Spielwarenhandel) möglichst senkrecht in die Höhe geworfen und vor dem Auftreffen auf das Gerät wieder aufgefangen werden (dies sollte vorher gut geübt werden). Bei der Durchführung muss man darauf achten, dass die Mindestentfernung zwischen Ball und Messfeld des USMD von 50cm immer eingehalten wird.

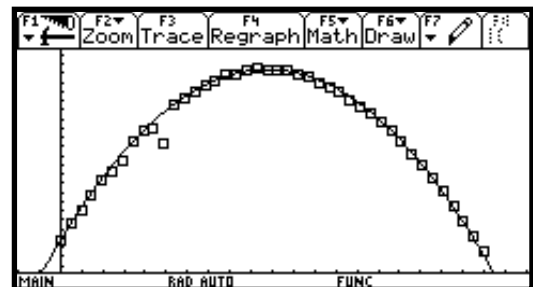
Das Mess-Programm auf dem TI-92 ermöglicht dann die Aufnahme der Messwerte und



die Auswahl der relevanten Messpunkte.



Mit dem y-Editor kann dann versucht werden eine Parabel zu finden, die die Punkte möglichst gut beschreibt.



7.1.3 Der Jahreslauf der Sonne

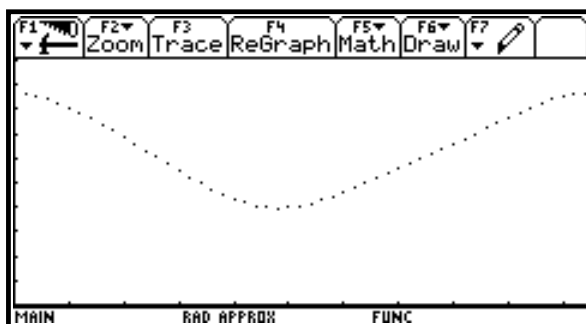
Der Lauf der Sonne über den Himmel ist ein periodischer Vorgang. Im Zusammenhang mit der Behandlung der trigonometrischen Funktionen in der 10. Klasse kann man versuchen diesen mit einer Sinus-Funktion zu modellieren. Es bietet sich dabei an, die Sonnenauf- oder Untergangszeiten eines Jahres als Messpunkte zu benutzen. Man kann diese Zeiten entweder aus einem Kalender entnehmen oder sie aus das Internet beschaffen. Eine gute Seite hierfür findet man unter der Adresse: http://aa.usno.navy.mil/data/docs/RS_OneYear.html. Hier können für ein beliebiges Jahr für beliebige geografische Koordinaten die Auf- und Untergangszeiten für Sonne und Mond abgefragt werden.

Wenn man sich jetzt auf die Sonntages eines Jahres beschränkt, so kann eine Tabelle mit 52 Messdaten aufgestellt werden. Dabei werden die Zeiten von der Darstellung h:min in Dezimaldarstellung umgerechnet

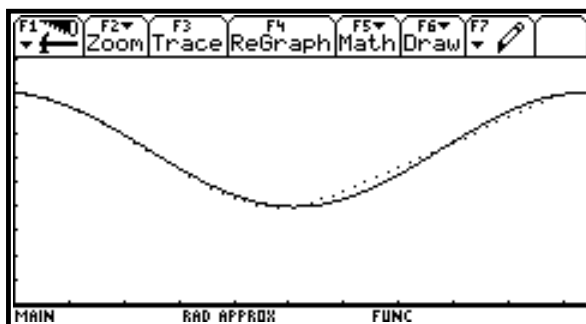
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	h	min	dezimal	Woche			
	c1	c2	c3	c4			
1	8	37	8.616667	1.			
2	8	33	8.55	2.			
3	8	26	8.433333	3.			
4	8	17	8.283333	4.			
5	8	5	8.083333	5.			
6	7	53	7.883333	6.			
7	7	39	7.65	7.			

r1c1=8
MAIN RAD APPROX FUNC

Diese Messdaten können dann auf dem TI-92 grafisch dargestellt werden.



Diese Messreihen können mit dem TI-92 modelliert werden, indem über den y-Editor ein Funktionsterm eingegeben wird und die Funktion dann grafisch dargestellt wird.



7.2 „Extremwerte“ - Projekt in einer 10. Klasse des Gymnasiums

7.2.1 Die Aufgabe:

Ein zusammengesetzter Körper aus zwei Teilkörpern sollte so berechnet werden, dass das Volumen von einer möglichst kleinen Oberfläche eingeschlossen wird. Die Schülerinnen und Schüler erhielten die Aufgabe, für eine Firma eine ausgefallenen Verpackung zu entwerfen, in der Reis angeboten werden soll. Dabei soll mindestens ein Teilkörper dabei ein spitzer Körper (Pyramide oder Kegel, wobei auch Pyramiden- oder Kegelstumpf möglich sind) sein.

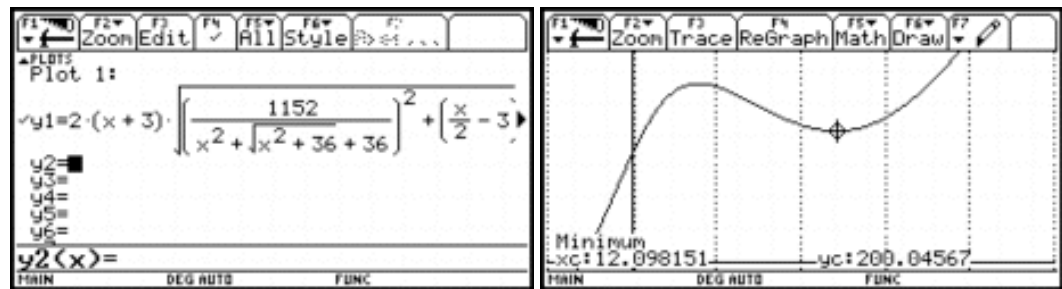
Es sollte eine Verpackung entworfen und ein Schnittmuster sowie ein Prototyp hergestellt werden. Anhand einer ausführlichen, schriftlich dokumentierten, Rechnung sollte nachgewiesen werden, dass alle Bedingungen eingehalten wurden.

7.2.2 Die Bearbeitung

Die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler besteht bei dieser Aufgabenart im Wesentlichen darin, ein (hier selbst gewähltes) Problem zu mathematisieren und eine geeignete Lösungsstrategie zu finden.

- ▶ Beim Mathematisieren kommt es hier darauf an, zum gewählten Körper die passenden Formeln zu finden und sie richtig zu verknüpfen.
- ▶ Für die Lösungsstrategie müssen Extremal- und Nebenbedingungen gefunden werden und daraus die optimalen Maße für die "Verpackung" gefunden werden.
- ▶ Bei den eventuell sehr komplizierten Umformungen, bzw. bei der Bestimmung des Extremwertes ist der TI-92 wieder eine Hilfe, die es den Schülerinnen und Schülern erlaubt auch komplizierte Probleme zu lösen.

Die gezeigten TI-92 Bildschirme und die folgende Seite einer Schülersausarbeitung zeigen die Bearbeitung eine Pyramidenstumpfes mit aufgesetztem Würfel.



7.2.3 Beispielseite einer Ausarbeitung

Im weiteren Verlauf der Berechnung des Pyramidenstumpfes haben wir den Pyramidenstumpf in vier einzelne Trapeze zerlegt. Anhand eines Trapezes haben wir dann mit dem Satz des Pythagoras die Höhe h und die zweite, untere Grundseite errechnet. Zudem verwendeten wir die Formel zur Berechnung eines Trapezes.

* des Flächeninhalts

$$A_{\text{T}} = \frac{a+3}{2} \cdot H$$

$$H^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}a - 3\right)^2$$

$$H = \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}a - 3\right)^2}$$

$$A_{\text{T}} = \frac{a+3}{2} \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}a - 3\right)^2}$$

$$A = 2(a+3) \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}a - 3\right)^2}$$

$$A = 2(a+3) \sqrt{\left(\frac{1152}{(a^2 + \sqrt{a^4 + 36\text{cm}^2} + 36\text{cm}^2)}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a - 3\right)^2}$$

Diese Formel gaben wir in den TI-82 ein und ließen den dazugehörigen Graphen zeichnen um die minimalen Werte bestimmen zu können.

7.2.4 Ergebnisse einiger Bastelarbeiten

