Martin Hohelüchter

Formale Mengenlehre und Topologie

Ein Beitrag zur Degradierung des Mengenbegriffs

Einleitung. Die Termini „Menge“ und „Element“ treten zwar erst seit relativ kurzer Zeit in der Mathematik auf. Sie haben aber rasch eine hervorragende Stellung erobert und sind heute in der mathematischen Praxis allgegenwärtig. Ihren Grund findet diese rasante Karriere zunächst allein in der Annahme eines „Begriffs“ der ´Menge`. Ein solcher Begriff scheint sehr allgemein zu sein: Statt von gewissen Gegenständen wie Löwen oder Tischen spricht man von ´Mengen`, falls es in gewisser Weise irrelevant ist, ob man von diesen oder von jenen spricht. Zudem scheint sich damit eine allgemeine Gliederungsmöglichkeit zu eröffnen, denn, insofern die Mengenbildung iterierbar ist, sind Mengen von Mengen zu bilden und Mengen damit zu stufen. Schließlich ermöglicht ein solcher Mengenbegriff – entgegen der Intention Cantors – in Verbindung mit einer extensionalen Philosophie ein Geistvermeidungsprogramm, denn, faßt man Begriffe als durch ihre Extensionen bestimmt und Extensionen als Mengen auf, kann die platonische Begriffsphilosophie durch Mengenlehre ersetzt werden. Ein Erfolg dieses „Begriffs“ ist also durchaus erklärbar.

Es überrascht aber, dass dieser Begriff und die damit entwickelte Theorie für die *Mathematik* wichtig geworden ist. Denn Allgemeinheit qualifiziert keinen Begriff für die Mathematik; anders als die Abstraktheit ist die Allgemeinheit in der Mathematik nicht relevanter als in anderen Disziplinen; besonders abstrakt aber ist der Begriff der Menge nicht. Umgekehrt ist für diesen Begriff sogar ein zentrales philosophisches aber nicht spezifisch mathematisches Problem relevant, das der Vereinbarkeit von Einheit und Vielheit. Die Mathematik verwendet den Begriff der Menge aber, ohne dessen Unklarheit zu bemerken, ja die vermeintliche Stärke der Mengenlehre, aufgrund derer sie als mathematische Basisdisziplin geeignet scheint, besteht geradezu in dieser Unklarheit. Die Antinomien der Mengenlehre machen diese Schwäche offenbar.

Die konventionelle (inhaltliche oder formale) Axiomatisierung kann diese Schwierigkeiten nicht beheben, weil sie zwar die *Abstraktheit* erhöht, die vorgeblich besondere Stellung der Mengenlehre aber in ihrer *Allgemeinheit* liegt. Danach kann die Mengenlehre ihre Sonderstellung nur behalten, wenn ihre formale Axiomatisierung nur oberflächlich vollzogen und die Mengenterminologie beibehalten wird. Sie ist demnach trotz vorgeblicher Formalisierung inhaltlich und somit ein Beleg dafür, dass die sog. Grundlagenkrise noch nicht behoben ist.

Obwohl mathematische Begriffe nicht von der Anschauung, sondern nur von der Einsicht gehalten werden und daher eine präzise Fixierung erfordern, obwohl diese Anforderungen im Bereich des Unendlichen aus eben diesem Grunde noch potenziert sind, wurde demnach mit dem underdog der „Menge“ ein Begriff akzeptiert, der aufgrund der einfachen Lösungen, die er versprach, in kürzester Zeit sämtliche Sicherheitsschranken durchbrach und zum dominanten Begriff der Mathematik avancierte. Unser Ziel ist es, ihn mit Hilfe einer allgemeinen Theorie einer *inhaltlichen* Formalität aus dieser unhaltbaren Sonderposition zu stürzen und der Mengenlehre als formaler Theorie einen Platz *neben* anderen formalen mathematischen Theorien zuzuordnen, um ihr so einen haltbaren Status zu sichern.

Dazu werden wir dreierlei leisten, zum einen mit Hilfe einer *relativistischen* an Frege orientierten Theorie der Attribution den logischen Status einer Menge als einer *Einheit* präzise angeben und ihn etwa von dem völlig anderen einer Klasse unterscheiden, zum zweiten damit aufzeigen, dass weder auf Mengen noch auf Klassen eine extensionale Mathematik aufzubauen ist, und schließlich zum dritten – mit Hilfe einer an anderer Stelle entwickelten Theorie der mathematischen Formalität als Struktur – die formale Theorie der Mengenlehre von der Menge ablösen derart, dass die inhaltliche Mengenlehre lediglich eine *Anwendung* der formalen ist.

§ 1 Mengen als Argumente des *Begriffs* der Menge

1. Zur Einführung eines Begriffs der Menge. Anders als die Geometrie und die Arithmetik hat die Mengenlehre keine lange Tradition. Sie ist nicht Ergebnis einer viele Jahrhunderte währenden gedanklichen Vertiefung einer alten Praxis, sondern aufgekommen aufgrund einer abgehobenen eher akademischen Fragestellung, der nach einem möglichen Größenvergleich innerhalb des Unendlichen und damit der nach einer Ausweitung und Präzisierung des Zahlbegriffs. Nach Anfängen bei Bolzano[1] ging Georg Cantor diese Frage ab 1872 allgemein an und fand ein für ihre Lösung entscheidendes Mittel in einer schon von Bolzano dazu vorgeschlagenen Äquivalenzrelation, der „<u>Gleichmächtigkeit</u>".

Als Argumente dieser Relation ließ Cantor ausschließlich sogenannte „Mengen" zu – was nicht notwendig ist, denn G. Frege definierte sie (später) ausschließlich zwischen *Begriffen*[2] – und versuchte diese zu charakterisieren z.B. durch:

(1.1) „Unter einer „<u>Menge</u>" verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten [.....] zu einem Ganzen."[3]

Die Objekte heißen dann „<u>Elemente</u>" der Menge.[4] Danach ist „Menge" nicht definiert als *Rolle* (in der Relation der Gleichmächtigkeit), sondern „Menge" wird als ein *Begriff* gesehen, und zwar als ein Begriff, unter den etwas fällt, das der Charakterisierung (1.1) genügt. Cantor unterstellt also, dass durch (1.1) irgendwelche logischen *Einheiten* beschrieben werden. Dies weist er aber nicht nach, ja er fragt nicht einmal nach einem Kriterium für logische Einheiten; er meint wohl, allein aufgrund einer „Zusammenfassungskraft" aus mehreren logischen Einheiten eine weitere bilden zu können.[5] Er beläßt es aber nicht bei dieser Unklarheit, die ja vielleicht zu beheben wäre, sondern verdeutlicht seine Auffassung durch Beispiele:

(1.2) *Jede Extension* ist eine Menge.

Jede Extension, d.h. mit Frege der *Umfang* jedes Begriffs, muß somit als eine Einheit gesehen werden können.[6] Gelingt das nicht und sind die beiden Cantorschen Intentionen (1.1) und (1.2) somit unvereinbar, steht man vor der Alternative, in der Mengenlehre eine Theorie von (Extensionen als) Nicht-Einheiten oder eine Theorie gewisser Einheiten, d.h. echter *Mengen* zu sehen.

2. Von der Menge zur „naiven" Mengenlehre. Der Begriff der Menge war also zwar fragwürdig und, wie Frege gezeigt hat, für die Untersuchung der Mächtigkeit unnötig, wurde aber nur zur Lösung des o.g. abseitigen Problems herangezogen. Nachdem seine Einführung jedoch akzeptiert war, wurde er bald nicht nur *dafür* genutzt, sondern Gegenstand einer eigenen Theorie, die die o.g. Spannung zwischen Einheit und Vielheit prinzipiell ignorierte, allfällige daraus erwachsende Schwierigkeiten ad hoc behob und somit unter Mißachtung logischer Fesseln sehr umfassend

---

[1] B. Bolzano, PdU

[2] G.Frege, GgdA 1893 und GdA

[3] G. Cantor, BtM

[4] Zwei Mengen sind gleichmächtig genau dann, wenn ihre Elemente eineindeutig aufeinander abzubilden sind. Jeder Repräsentant einer Äquivalenzklasse, d.h. jede Menge liefert dann die „<u>Mächtigkeit</u>" jedes Mitglieds dieser Klasse. Um Mächtigkeiten miteinander vergleichen zu können, führt Cantor dann einen Begriff der Teilmenge ein: eine Menge N ist „<u>Teilmenge</u>" einer Menge M genau dann, wenn jedes Element von N auch Element von M ist. Wie sich zeigt – etwa im Falle der *geraden* und *aller* natürlichen Zahlen –, kann durchaus eine Menge mit einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig sein. Eine Menge M hat genau dann eine „<u>höhere Mächtigkeit</u>" als eine Menge L, wenn L gleichmächtig mit einer Teilmenge N von M, nicht aber mit M ist.

[5] Damit ist allgemein die Frage berührt, ob bzw. unter welchen Umständen logische Einheiten überhaupt generiert bzw. als solche angenommen werden können.

[6] Damit stand Cantor nicht allein; solcherart Einheiten verwendet unter der Bezeichnung *classe* etwa auch G. Peano. G. Peano, FLM.

werden konnte. Diese Theorie, die „naive Mengenlehre“, galt wohl wegen ihrer Nähe zur Mächtigkeit und damit zur Zahl als eine *mathematische* Theorie. Die o.g. Cantorsche Charakterisierung eines Begriff der Menge läßt ja eine solche Einordnung nicht vermuten.

Der Begriff der Menge schien in der Nachfolge Cantors intuitiv klar zu sein, offen war lediglich die allerdings für jeden Begriff entscheidende Frage nach seiner Reichweite. Diese galt zunächst als überaus groß; ´Menge` war ja nicht nur irgendein, sondern ein extrem allgemeiner Begriff, der frei von jedem spezifischen Inhalt alles in beliebiger Abgrenzung zu erfassen erlaubte. Daher hatte die Mengenlehre innerhalb weniger Jahre die Arithmetik als Basistheorie der Mathematik abgelöst. Ihre Grundbegriffe ´Element` und ´Menge` wurden selbstverständliche Werkzeuge der mathematischen Praxis. Dies führte sogar zu der Ansicht, Mathematik sei mit Mengenlehre gleichzusetzen. Das ist zunächst nicht ein Erfolg der *Theorie*, sondern ein Erfolg des *Begriffs* der Menge. Weil die Extension jedes Attributes als eine Menge galt,[1] war es möglich, eine *extensionale* Mathematik zu treiben, d.h. jeden Begriff durch (s)eine Extension zu ersetzen.[2] Mit dem Begriff der Menge hatte Cantor also vielen Mathematikern ein vermeintliches „Paradies“ (Hilbert) der Begriffslosigkeit eröffnet, „aus dem sie sich nicht vertreiben lassen wollten“. Die Geschichte der Mengenlehre ist von da her apologetisch geprägt.

3. Antinomien des „Begriffs“ der Menge. Dieses paradiesische Reich stand nämlich, wie sich schnell zeigte, auf tönernen Füßen. Bei der Freude über die universellen Möglichkeiten dieses „Begriffs“ hatte man die logischen Grundlagen der Begriffsbildung vernachlässigt, und schon bald wurde die Unhaltbarkeit des Cantorschen „naiven“ Mengenbegriffs sichtbar. Die Extensionen von Begriffen, d.h. die wichtigsten Beispiele von Mengen, waren ja als solche von der Attribution bzw. Prädikation bzgl. dieser Begriffe abhängig. Einige solcher Begriffe führten aber zu Antinomien, so z.B. die Begriffe „Ordinalzahl“ (Burali-Forti, 1897) und „Menge, die sich nicht selbst als Element enthält“ (Russell, 1903). Wie Cantor selbst (1899) aufdeckte, ist sogar die Allmenge, d.h. die Extension des „Begriffs“ ´Menge` keine Einheit.[3]

Dabei sind die genannten Beispiele nicht etwa *widersprüchliche* Begriffe (wie ´hölzernes Eisen`), sodass ihre Extension leer wäre, sondern eine Einheit liegt genau dann in der Extension, wenn sie *nicht* darin liegt. Die o.g. „Begriffe“ sind somit für kein einziges Argument definit. Da die Definitheit wesentlich ist für die Bildung der Extension,[4] haben die o.g. und ähnliche „Begriffe“ keine Extensionen. Sie liefern somit entgegen (1.2) keine Mengen. Damit ist der ursprüngliche Cantorsche „Begriff“ der Menge, der wesentlich auf Extensionen abzielt, bereits unabhängig davon, ob Extensionen als Beispiele von Mengen taugen, obsolet geworden:

Satz 1.1 : „Menge“ im Sinne der „naiven“ Mengenlehre ist kein *definiter* Begriff.

Ein Begriff kann aber nur definit sein, wenn er überhaupt ein Attribut ist, d.h. wenn insbesondere klar ist, worauf er anwendbar ist. Die Frage des Anwendungsbereiches von Begriffen war jedoch in keiner Weise geklärt. Somit wurden durch die Einführung des „Begriffs“ der Menge fundamentale Mängel in der logischen Theorie der Attribution bzw. der Prädikation offenbar.[5] Um diese zu beheben, hätte man nun den

---

[1] Noch 1963 führt W.Quine in seine „Mengenlehre und ihre Logik“ ein mit der Charakterisierung: „Mengenlehre ist die Mathematik der Klassen. Mengen sind Klassen.“ W. Quine, MiL

[2] Auch diese extensionale Position kann daher von Quine vehement vertreten werden.

[3] Denn die Potenzmenge der Allmenge müßte einerseits als Menge in der Allmenge enthalten sein, andrerseits aber im Widerspruch dazu eine höhere Mächtigkeit als diese haben.

[4] nicht aber bereits für die Attribution, d.h. für Sachverhalte

[5] Die o.g. Russellsche Antinomie z.B. trat ja auf bei jeder durch eine geeignete Eigenschaft – etwa der, auf sich zuzutreffen – gebildeten Extension.

Begriff der Menge hintansetzen und zuvor eine generelle Theorie der Anwendung von Attributen bzw. Prädikaten auf mögliche Argumente entwickeln können.

Doch wurde dieser Anlaß, die Theorie der Attribution zu vervollkommnen, nicht genutzt.[1] Statt dessen dienten alle Anstrengungen weiterhin nur dem Ziel, die Basisstellung der Mengenlehre zu erhalten. Daher versuchte man nicht, den *Anwendungsbereich* (allgemein von Begriffen) zu reglementieren,[2] sondern einen Begriff der ´Menge` zu retten und nur die *Extension* dieses Begriffs einzuschränken. Letzteres ist aber nur möglich, indem der *Anwendungsbereich*, d.h. der Bereich möglicher Argumente, dieses Begriffs modifiziert wird, denn dieser ist ja im Gegensatz zur Extension frei wählbar. Dabei versuchte man weiterhin einen Mengenbegriff zu installieren, der Extensionen, und zwar möglichst *alle* Extensionen, umfaßte. Damit bleibt in der auf den *Begriff* der ´Menge` bezogenen Mengenlehre die zentrale philosophische Frage offen, wie mehrere Einheiten als solche eine Einheit, nämlich eine Menge sein können. Wir werden auf diese Frage später eingehen.

§ 2 Mengen als Argumente der $\in$-Relation

1. Die $\in$-Relation. Hier wenden wir uns zunächst der Frage zu, in welcher Weise die Mengen in der Theorie der „naiven“ Mengenlehre vorkommen. Sie gelten ja als Grundobjekte dieser Theorie. Darin werden sie nun in Reaktion auf die Einsicht des Satzes 1.1 nicht mehr als Argumente eines *Begriffs* der Menge, sondern als Argumente einer 2-stelligen *Relation*, der $\in$-Relation, aufgefaßt, durch die gemäß (1.1) das Verhältnis zwischen Element und Menge erfaßt wird. Damit wird aber weiterhin der Einheits-Status jeder Menge vorausgesetzt. Denn wie bereits für die Gleichmächtigkeit gilt ja für jede Relation und so auch für die $\in$-Relation, dass nur Einheiten als ihre Argumente in Frage kommen.

Dadurch ist für die Definition von Mengen eine gewaltige Entlastung erreicht, denn als Argumente der $\in$-Relation müssen Mengen nur noch *irgendwelche* Einheiten sein, die Träger dieser Relation sind. Dabei *können* sie zwar noch die Extension eines Begriffs (der Menge) sein, falls dieser haltbar ist, *müssen* dies aber nicht. Insofern die $\in$-Relation nun als entscheidend für die Mengenlehre erkannt wurde, ist somit die Einführung des problematischen *Begriffs* der ´Menge` überflüssig. Somit gilt

Satz 2.1 : Ein *Begriff* der ´Menge` ist für die Mengenlehre nicht nötig.

Ausgehend von der $\in$-Relation wurden nun zwei unterschiedliche Wege beschritten, um der Probleme Herr zu werden, die durch das Einbeziehen von Extensionen in die Mengen drohen, ein logischer, die „Typentheorie“, und ein mathematischer, die Axiomatik. Durch die Typentheorie wird die $\in$-Relation *auf*-, durch die Axiomatik wird sie *ab*gewertet.

2. Zur Russellschen „Typentheorie“. Bertrand Russell glaubte, die o.g. mit der Extension und dadurch mit der *Attribution* verbundenen Schwierigkeiten der Mengenlehre überwinden zu können, indem er die Attribution als logische Beziehung völlig aufgab; er ist der Ansicht, ihre Funktion sei durch die $\in$-Relation zu übernehmen.[3]

´Sokrates ist ein Athener`

sei also logisch aufzufassen als

´Sokrates $\in$ Menge der Athener`.

[1] Auf ihm wären allerdings die für die Menge intendierten Ziele auch nicht erreichbar gewesen. Ein „Begriff“ der Menge, der den Ambitionen der transfiniten Mengenlehre enspricht, ist unhaltbar.
[2] An anderer Stelle (siehe z.B. M.H., EfK oder M.H., Kon) wurde ein solcher Ansatz entwickelt.
[3] B. Russell, MLbTT

Er wertet also die $\in$-Relation zu einer logischen Grundbeziehung auf und sucht dann die o.g. Anwendungsprobleme allein innerhalb einer Theorie der *$\in$-Relation* zu lösen. Dabei orientiert er sich an traditionellen Prinzipien der *Attribution*, wie etwa dem Verbot der Selbstanwendung von Attributen, und entwickelt damit für die Mengen als die Argumente der $\in$-Relation eine Hierachie von Typen, ebenso wie G. Frege[1] eine Stufung von *Begriffen* vorgeschlagen hatte. Jeder Menge a ist genau eine natürliche Zahl ´Typ (a)` zugeordnet, wobei gelten soll

$a\in b \Rightarrow$ Typ (b) = Typ (a) +1 („reine endliche Typen“)

bzw. in einer modifizierten Theorie

$a\in b \Rightarrow$ Typ (b) > Typ (a) („kumulative Hierarchie“).

Mit solchen Typenbedingungen meint er die Anwendbarkeit der $\in$-Relation regulieren und damit insbesondere die Fälle $a\in a$ und $a\notin a$ ausschließen und so die o.g. Antinomien vermeiden zu können.

Damit greift er – um die dominante Stellung der Mengenlehre zu retten – sehr tief in die Logik ein. Anders als etwa Frege, der mit ´Begriffen` und `Gegenständen` *zweierlei* logische Grundeinheiten unterscheidet, nimmt er neben der $\in$-Beziehung nur eine *einzige* Art logischer Einheiten an, die Mengen; sämtliche Einheiten sind Mengen. Die Einführung von Mengen ist danach unnötig und somit irrelevant.

Doch statt die Logik von einer überflüssigen Theorie der Attribution zu entlasten, bürdet Russell deren Funktion lediglich zusätzlich der Mengenlehre auf. Damit muß die Mengenlehre nicht nur die Definition von ´Menge`, sondern zugleich auch die einer logischen ´Einheit` erbringen, da Mengen ja Grundeinheiten der Logik sein sollen. Diese Aufgaben kann sie aber höchstens alternativ erfüllen; bei Russell bleiben diese Fragen daher offen. Die Russellsche Typentheorie der $\in$-Relation kann also die Anforderungen einer Theorie der Attribution nicht erfüllen. Somit gilt

Satz 2.2 : Die $\in$-Relation ist *keine* logische Grundbeziehung.

3. Zur (inhaltlichen) Axiomatisierung der Mengenlehre. Als alternativer Weg zur Rettung der konventionellen Mengenlehre bot sich die Axiomatisierung an.[2] Auch die *axiomatische* Theorie untersucht ja nicht mehr Gegenstände wie etwa Mengen, sondern Relationen wie etwa die $\in$-Relation. Nur Relationen sind ja zur mathematischen Axiomatisierung geeignet; die Axiome einer axiomatischen Theorie „beschreiben“, wie Hilbert herausgearbeitet hat,[3] jeweils ausschließlich *Relationen*, und nicht mehr deren Argumente. Diese Relationen bilden jeweils den Gegenstand einer „inhaltlichen“ axiomatischen mathematischen Theorie. Danach hat die $\in$-Relation als Relation keine Sonderstellung. Sie ist eine Relation neben anderen und wird in der Mengenlehre thematisiert. Somit gilt

Satz 2.3 : Gegenstand der *inhaltlichen* axiomatischen Mengenlehre ist die $\in$-Relation (und evtl. weitere Relationen).

Jedes *inhaltliche* Axiomensystem (der Mengenlehre) darf also nur *Relationen* beschreiben. Ein System ist *inhaltlich*, insofern es von bestimmten Relationen ausgeht, die es zu beschreiben gilt. Als Beschreibung dieser Relationen ist daher jedes der Axiome richtig oder falsch. Diese Bewertung ist aber zu vernachlässigen, da nur die Beschreibung als solche relevant ist; verschiedene (evtl. gar unvereinbare Axiome) beschreiben evtl. *verschiedene* Relationen. Daher können Beschreibungen durchaus verschieden sein, ja einander ausschließen; wie verschiedene Geometrien so sind auch verschiedene Mengenlehren möglich.

[1] G. Frege, BuG
[2] Zur Entwicklung der axiomatischen Mengenlehre vgl. etwa H.D. Ebbinghaus, EdM
[3] D.Hilbert, GdM

Da die $\in$-Relation keine Grundbeziehung ist, können ihre Argumente nun typenfrei sein. Verschiedene solcher Axiomensysteme sind vorgeschlagen worden. Ein erstes wurde 1908 von Zermelo[1] aufgestellt und gilt – leicht modifiziert – bis heute als grundlegend. Darin geht er aus von einer 2-stelligen Relation $\in$[-,-] auf „beliebigen Objekten". Trifft diese Relation auf ein Bitupel [a,b] zu, heißt a ein „Element", b eine „Menge".[2] Somit gilt

Bemerkung 2.3 : Element und Menge treten nur gemeinsam auf.

Damit hat Zermelo ´Element` und ´Menge` eingeführt nicht mit Bezug auf einen „Begriff" der ´Menge`, sondern mit Bezug auf eine Relation, die $\in$-Relation. Folgende Axiome sollen nun nach Zermelo diese $\in$-Relation beschreiben:

(2.0) $(Ex)(Ey).x\in y$ „Existenzaxiom"

(2.1) $(y)(z).[(x).(x\in y \leftrightarrow x\in z) \rightarrow y=z]$ „Extensionalitätsaxiom".

Jede Menge ist durch die Gesamtheit ihrer Elemente eindeutig bestimmt.

(2.2) $(x)(y)(Ez)(u).[u\in z \leftrightarrow (u=x \vee u=y)]$ „Paarmengenaxiom"

Zwei beliebige (nicht notwendig verschiedene) Einheiten x,y sind genau die Elemente einer Menge; diese nennt man „{x,y}".

(2.3) $(x)(Ez)(y)(Eu).[y\in z \leftrightarrow (y\in u \wedge u\in x)]$ „Vereinigungsmengenaxiom"

Zu jeder Menge x tritt (mindestens) eine Menge z auf, die genau die Elemente enthält, die Elemente der Elemente von x sind.

(2.4) $(x)(Ez)(y)(u).\ [y\in z \leftrightarrow (u\in y \wedge (u\in y\rightarrow u\in x))]$[3] „Potenzmengenaxiom"

Zu jeder Menge x tritt mindestens eine Menge z auf, die genau die Elemente enthält, die Teilmengen von x sind.

(2.5) $(F)(x)(Ez)(y).[y\in z \leftrightarrow (y\in x \wedge F(y))]$ „Aussonderungsaxiom".

Für jede Eigenschaft tritt innerhalb jeder Menge (mind.) eine Menge z auf, die genau die Elemente mit dieser Eigenschaft enthält.

Wegen (2.1) gelten die Mengen z in (2.2) – (2.5) als jeweils eindeutig bestimmt; sie heißen in (2.2) „Paarmenge" {x,y}, in (2.3) „Vereinigungsmenge", in (2.4) „Potenzmenge", in (2.5) „Extension" des Begriffs F.

Durch (2.5) ist jedem Begriff – wegen (2.1) eindeutig – eine Menge, seine Extension, zuzuordnen; jedes Axiom, das eine solche Zuordnung leistet, heißt ein „Komprehensionsaxiom". Ein solches Axiom macht also zwar – anders als die Typentheorie – die Attribution nicht überflüssig, sondern setzt sie voraus; doch sollen damit Ergebnisse der allgemeinen Attribution in die Mengenlehre einbezogen werden. Durch diese Anlehnung an den Begriff kann also die Vorleistung der Begriffsbildung bedingungslos in die Mengenlehre übernommen und so u.a. ein unübersehbares Potential an Mengen gewonnen werden. Dadurch werden die möglichen Mengen extrem ausgeweitet. Deshalb muß stets – z.B. durch Definitheitsforderung – Vorsorge getroffen werden, dass diese Ergebnisse die Mengenlehre nicht sprengen.

Enthält die Extension keine Elemente, wäre sie demnach eine *´leere Menge* `„∅", die zudem gemäß (2.1) eindeutig bestimmt wäre. Doch folgt aus Bemerkung 2.3

Satz 2.4 : Im Zermelo-System kann eine ´leere Menge` keine Menge sein.

Im folgenden sog. „Unendlichkeitsaxiom" kann daher ∅ nicht die leere Menge sein:

(2.6) $(Ez)(x).[\varnothing\in z \wedge (x\in z \rightarrow x \cup\{x\}\in z)]$ mit $\{x\}:= \{x,x\}$.[4]

Um eine leere Menge als Menge (ohne Elemente) einzuführen, muß ´Menge` demnach anders definiert werden.

Der Axiomatisierungsansatz sah in der Mengenlehre eine von vielen axiomatischen Theorien, er wies ihr also nicht mehr von vornherein allein aufgrund der dominanten

[1] E. Zermelo, UGM

[2] „Es kann vorkommen, dass zwischen zwei Objekten x und y eine Beziehung von der Form $x\in y$ besteht; wir sagen dann x sei ein *Element* von y, und y sei eine *Menge*."

[3] Dabei wird $(u).\ u\in y \rightarrow u\in x$ oft abgekürzt durch: $u\subseteq x$.

[4] Aus diesem Axiom folgt insbesondere das Axiom (2.0).

Stellung des *Begriffs* der Menge eine herausragende Position zu;[1] ein solcher *Begriff* der ´Menge` tritt ja nicht mehr auf. Ob andrerseits gewissse *Axiome*, etwa solche wie die o.g. der Mengenlehre, eine Sonderstellung der Mengenlehre begründen können, dürfen wir hier zunächst offen lassen.

Denn die gesamte klassische, d.h. inhaltliche Axiomatik erwies sich am Beispiel der euklidischen Geometrie als unhaltbar; die gesamte wahrheitsbezogene Axiomatisierung war in der Grundlagenkrise mit dem Widerspruchsproblem fragwürdig geworden. Jeder Versuch, die Mengenlehre auf eine wahrheitsbezogene *inhaltliche* Axiomatik zu stützen, mußte somit fehlschlagen.

Während Russells typentheoretischer Ansatz noch spezifisch die Mengenlehre betraf, ist der axiomatische Ansatz nicht mehr spezifisch für die Mengenlehre. Damit ist auch seine Krise nicht mehr spezifisch für die Mengenlehre, sondern allgemeiner. Bevor also die Mengenlehre oder irgendeine andere axiomatische (mathematische) Theorie etabliert werden kann, muß zunächst die allgemeine Grundlagenkrise bewältigt werden.

§ 3 Sprachliche contra attributive Formalität

1. Syntaktisch-formale Axiomatik. David Hilbert begegnete dieser Krise mit einer außerordentlichen Antwort. Er suchte nicht mehr nach einer *inhaltlichen* Lösung, sondern gab die Untersuchung des mathematischen Inhalts völlig auf. Statt dessen wird das bis dahin selbstverständliche *Mittel* der sprachlichen Darstellung eines Inhaltes, etwa eine wahre Aussage als Darstellung einer Tatsache, explizit von diesem Inhalt gelöst. Sprachliche Ausdrücke und ihre rein syntaktische Form werden vor und unabhängig von einer möglichen Bedeutung als eigenständige Gegenstände behandelt.

Die auf diese Weise entwickelte von ihm sogenannte „formale" Axiomatik hat auf den ersten Blick manches für sich. Zum ersten beseitigt sie ohne Zweifel das Ausgangsproblem, denn uninterpretierte Ausdrücke sind nicht wahrheitsfähig, und damit sind die Schwierigkeiten der wahrheitsbezogenen inhaltlichen Axiomatik behoben. Weiter können die Gegenstände der mathematischen *Praxis* dieselben bleiben. Bis dahin untersuchte die Mathematik – natürlich sprachlich vermittelt – gewisse Relationen, in der Geometrie etwa die Relation ´zwischen`, in der Mengenlehre die $\in$-Relation. Nun betrachten die „Formalisten" der Hilbertschule zunächst allein die bei diesen Untersuchungen verwendeten sprachlichen Mittel, jedoch nicht als Mittel, d.h. als interpretierbar, sondern (zunächst) nur als rein syntaktische Einheiten. Die Axiome wie etwa die des o.g. Axiomensystems von Zermolo werden als syntaktische „Aussageformen"[2] aufgefaßt. Inhalte sind durch diese Auffassungsänderung nicht berührt. Durch die Formalisierung wird also kein inhaltliches Axiom ausgeschlossen, es kommt aber auch kein Axiom hinzu. Die Hilbertsche Formalisierung ist demnach als solche bzgl. des Axiomenkörpers neutral.

Satz 3.1 : Jedem inhaltlichen entspricht genau ein formales Axiom,
jedem inhaltlichen genau ein formales Axiomensystem.

Dieser Ansatz wertet natürlich die Syntax und ihre Theorie gewaltig auf. Daher werden vielerlei Kalküle entwickelt, die die Bildung rein syntaktischer Einheiten wie Zeichenreihen, Formeln und Herleitungen regeln. Auch die o.g. Axiome (2.0)ff, formuliert in der Sprache der Prädikatenlogik, sind dann Formeln, die aufgrund derartiger Kalküle gebildet sind. Aus jedem System solcher Axiome ist dann in einem Herleitungskalkül ein gewisser Corpus von Formeln zu gewinnen.

[1] Erst *innerhalb* der axiomatischen Theorien sollte die Mengenlehre wieder dominant sein.
[2] Dieser Terminus ist demnach irreführend, da er auf die Semantik Bezug nimmt.

2. Kritik der syntaktisch-formalen Axiomatik. Eine solche Präzisierung der Syntax von Sprachen ist nun zweifellos möglich, zur Analyse von Sprache notwendig und allgemein von großem Nutzen, denn damit sind Beispiele geschlossener Systeme zu bilden. In ihnen wird durch die Notwendigkeit der expliziten Konstruktion manche logische Beziehung offengelegt. Fraglich ist aber, ob bzw. in welchem Maße dieses Thematisieren des Sprachkörpers relevant ist für die Lösung der Grundlagenkrise. Hilbert selbst hat bereits erkennen müssen, dass die Frage nach evtl. inkonsistenten „inhaltlichen" Axiomen analog auch innerhalb seiner „formalen" Axiome auftritt. Denn für jedes solche System formaler Axiome droht die Herleitbarkeit eines Widerspruchs, d.h. dass evtl. aus denselben Axiomen sowohl eine Formel ´A` wie auch eine Formel ´¬ A` herleitbar sind. Das Problem der Widerspruchsfreiheit tritt also nicht nur in der inhaltlichen, sondern auch in der „formalen" Axiomatik auf.[1] Daher muß für jedes System insbesondere in der Mathematik und daher auch in der „formalen" Mengenlehre jeweils ein Widerspruchsfreiheitsbeweis erbracht werden, um die Konsistenz zu sichern und diesem Verdacht zu begegnen.

Theoretisch ist ein solcher innersyntaktischer Beweis für ein System z.B. dadurch zu gewinnen, dass eine Formel B aufgewiesen wird, die *nicht* aus diesem System ableitbar ist. David Hilbert[2] und seine Schüler[3] versuchten ein solches Projekt in der „Beweistheorie" allgemein zu realisieren. Es erwies sich aber aufgrund des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes als unmöglich[4]: Die Widerspruchsfreiheit eines Systems ist nicht innerhalb des Systems beweisbar.

Daher gibt dieser Hilbertsche Ansatz seine rein syntaktische Position auf und zieht die *Semantik* hinzu, um die Widerspruchsfreiheit eines *syntaktischen* Systems zu beweisen: Falls es ein Modell hat, d.h. auf existierende Entitäten interpretierbar ist, ist es widerspruchsfrei. Gödel hat auch die Umkehrung bewiesen. Danach ist ein prädikatenlogisches System widerspruchsfrei genau dann, wenn es *erfüllbar* ist.

Mit dieser Lösung wäre aber die für das Hilbertsche Verständnis der Formalität entscheidende Bedingung verletzt, die Befreiung vom Inhalt. Für den *Nachweis* innersyntaktische Beziehungen wie den Widerspruch wird ja dabei wieder ein Inhalt herangezogen; denn mittels der Semantik nimmt man Bezug auf (vorgeblich bestehende) externe Verhältnisse, um das Vorliegen interner zu begründen.

Darüber hinaus kann dieser Ansatz nur gelingen, wenn eine (geeignete) Interpretation für die *syntaktischen* prädikatenlogischen Formeln gefunden wird. In der klassischen Auffassung[5] wird ein Ausdruck der Gestalt Px durch eine Interpretation I abgebildet, indem die „Prädikatsvariable" P auf ein 1-stelliges Attribut I(P), und die „Individuenvariable" x auf ein Individuum I(x) abgebildet werden[6]: I(Px) := I(P)I(x)

Doch für *quantifizierte* Ausdrücke wie etwa (x).Px wird nur angegeben, unter welchen Bedingungen eine Interpretation I ein „Modell" davon sei, nämlich wenn I(P) auf *jede* Interpretation von x zutrifft. Eine *Interpretation* von (x).Px dagegen wird

[1] D.Hilbert, „Charakteristisch für sie [die formale Axiomatik] ist, dass sie einen *Nachweis der Widerspruchsfreiheit* erforderlich macht."[GdM S.2]

[2] D. Hilbert, GdG

[3] so etwa Ackermann, Bernays und von Neumann

[4] K. Gödel, fuS

[5] siehe etwa H. Hermes, EmL

[6] Um nun die Widerspruchsfreiheit auf die Erfülltheit zurückführen zu können, wird dabei – etwa von Quine explizit – vorausgesetzt, dass I(x) existiert. W. Quine, MiL S.21 Was im Wertebereich einer quantifizierbaren Variablen liegt, muß danach als **reales** Objekt anerkannt werden. Damit wiederum wird die Widerspruchsfreiheit der Syntax auf eine bestimmte Ontologie gegründet, und es muß eine haltbare Attributstheorie gefunden werden, die nicht *logische* Einheiten, sondern Realia aneinander bindet.

nicht genannt; ein Modell von (x).Px ist ja keine (spezielle) Interpretation von (x).Px. Quantifizierte Ausdrücke können danach Modelle haben, sind jedoch nicht interpretierbar. Wenn aber die charakteristischen Ausdrücke der Prädikatenlogik nicht interpretierbar sind, muß dieser Ansatz mit *diesem* Interpretationsverfahren als gescheitert gelten. Ein anderes Interpretationsverfahren ist möglich – wir werden es später nutzen – doch gibt es der Syntax keine Sonderstellung mehr.

Die sprachbezogene formale Axiomatik im Hilbertschen Sinne ist somit zwar geeignet, die Konsistenzprobleme zu formulieren, nicht aber, sie zu lösen. Der gesamte Hilbert-Ansatz, die Widerspruchsfreiheit mittels *Folgerungen* zu zeigen, ist damit verfehlt. Er liefert keine befriedigende Antwort auf die Grundlagenkrise. Der Versuch der Formalisten, „sich nicht für das philosophische Problem zu interessieren, das von den „Paradoxien“ gestellt wird, und somit die platonische Haltung aufzugeben, die darauf absieht, den mathematischen Begriffen einen geistigen „Inhalt“ zuzuordnen“[1], ist verfehlt. Das *inhaltliche* Grundproblem ist nicht zu umgehen.

Der Hilbertsche Ansatz kann aber – entgegen der eigenen Intention – dieses inhaltliche Problem deutlicher machen. Denn zum einen ist die Sprache als Teil der Welt mit derselben Art von Logik erfaßbar wie die gesamte Welt; andernfalls wäre jede Interpretation unmöglich. Zum andern hat Sprache, insofern sie jeden Bereich darzustellen gestattet, eine herausragende Stellung. Daher zeigt das Auftreten des Widerspruchsproblems *auch* in der Sprache, dass man ihm durch Flucht in einen anderen Grundbereich nicht entkommen kann und dass somit jeder Fundamentalismus unhaltbar ist, worauf auch immer er gründet.

3. Attributive Formalität. Mit *spezifisch sprachlichen* Mitteln kann die Grundlagenkrise also nicht bewältigt werden. Daher werden wir den Hilbertschen Ansatz der Formalisierung, der die mit der Axiomatisierung verbundenen Widerspruchsfreiheitsprobleme in die Sprache verlagert, nicht weiter verfolgen, sondern zum Ausgangsproblem zurückkehren und nach einer „inhaltlichen“ Lösung suchen.[2]

Im vorliegenden Fall der Mengenlehre droht das Widerspruchsproblem ja nicht nur „inhaltlich“ bei der $\in$-Relation und „formal“ bei Aussageformen wie etwa o.g. Axiomen, innerhalb derer die Formel ´$x\in y$` auftritt, sondern bei jeder Relation, auf die diese Axiome interpretierbar sind. Es sind ja i.a. mehrere Interpretationen, insbesondere auf verschiedene Relationen möglich. Die Formel ´$x\in y$` muß also nicht auf die Elementschafts-Relation, sondern kann auf jede Relation interpretiert werden, die die in den Axiomen formulierten Bedingungen erfüllt und somit ein Modell der Axiome ist.

Satz 3.2 : Die formalen Axiome der Mengenlehre sind nicht spezifisch für die $\in$-Relation.

Alle Modelle, d.h. alle gültigen Interpretationen der sprachlichen Axiome, der Mengenlehre haben dasselbe Problem. Es ist darüber hinaus nicht spezifisch für die $\in$-Relation, sondern tritt bei „inhaltlichen“ und „formalen“ Axiomen *jeder* Relation auf. Eine Lösung darf also keinen bestimmten „inhaltlichen“ Bereich bevorzugen; sie muß den Kern des Widerspruchsproblems erfassen und so die gleichartige Behandlung verschiedener Bereiche ermöglichen.

Wie wir an anderer Stelle[3] gezeigt haben, kann man bei Hilbert neben seiner sprach bezogenen auch eine solche allgemeinere Lösung angelegt sehen. Ausgangspunkt ist

---

[1] Nicolas Bourbaki, EdM

[2] Auch Hilbert sah in der Mathematik nicht *nur* ein (Sprach)spiel; auch er scheint immer an eine objektive mathematische Wahrheit, d.h. an das Vorhandensein eines eigentlichen Gegenstandes der Mathematik geglaubt zu haben. Siehe dazu etwa D.Hilbert, GdG [7]1930, S.315, 323.

[3] Zum folgenden siehe M.H., FAA

dabei die Untersuchung des Inhalts *inhaltlicher* mathematischer Axiome. Sie betreffen nach Hilbert ausschließlich *Beziehungen*: *Inhaltliche* Axiome liefern eine „Beschreibung“ von Beziehungen. Die Beschreibungen können dann abgehoben und für sich betrachtet werden und bilden so *formale* Axiome. Solche Beschreibungen sind u.a. durch folgende Eigenheiten charakterisierbar:

a) Mehrere Axiome können zu einer Beschreibung beitragen.

b) Die Beschreibung muß nicht eindeutig sein; mehrere Relationen unterliegen evtl. derselben Beschreibung.

c) Umgekehrt sind evtl. verschiedene Beschreibungen derselben Beziehung möglich.

Doch ist der logische Status solcher Beschreibungen nicht eindeutig: In der Nachfolge Hilberts versteht man darunter eine sprachliche Darstellung des Beschriebenen, d.h. der betreffenden Relation(en); nach dem konventionellen Hilbertansatz sind sie also *Aussagen,* d.h. interpretierte Sätze über Beziehungen.

Im Gegensatz dazu verstehen wir unter einer Beschreibung die Angabe von *Eigenschaften* des Beschriebenen; danach sind Beschreibungen *Urteile* über Beziehungen. Inhaltliche Axiome der Mathematik sind somit Urteile nicht über *Gegenstände* – in der Geometrie etwa über Punkte oder Geraden –, sondern Urteile über *Beziehungen* – in der Geometrie etwa über ´zwischen` oder ´kongruent` –:

Satz 3.3 : Inhaltliche Axiome sind Urteile, deren Gegenstände Relationen sind.

Beide Ansätze genügen der o.g. Charakterisierung. Doch ist unser Ansatz im Gegensatz zum konventionellen der Hilbertschule *inhaltlich*.[1] Dieser führt in die Syntax und Semantik, d.h. in die Sprache, unser Alternativansatz in die Attributionstheorie, d.h. in die Logik.

Für jedes einfache Urteil ist nun das Beschreibende vom Beschriebenen, d.h. das Attribut von der Relation, die Form vom sie tragenden Gegenstand, abzuheben. Aus jedem inhaltlichen *Urteils*- ist so ein *formales Attributs*axiom zu gewinnen:

Satz 3.4 : (Attributiv) formale Axiome sind *Attribute* von Relationen.

Insofern Attribute nicht wahrheitsfähig sind, ist das Problem konkurrierender Wahrheiten damit gelöst, und es ist *inhaltlich* gelöst. Die Sprache bleibt primär lediglich ein Mittel, Inhalte darzustellen. Sie kann natürlich auch selbst zum Inhalt werden, der mit Mitteln einer Metasprache dargestellt wird. Sie hat aber keinen Vorrang mehr vor anderen Inhalten, sondern ist von der Analyse her mit ihnen gleichrangig. Von der Funktion her ist sie sogar nachrangig. Denn Sprache ist nicht mehr dominant, sondern dienend; ein Inhalt ist nicht mehr mögliches Interpretat einer Sprache,[2] sondern Sprache hat umgekehrt einen Inhalt angemessen darzustellen.

Das Problem des Widerspruchs besteht danach nicht primär zwischen *Formeln*, sondern zwischen *Attributen*. Daher liegt auch die Lösung dieses Problems nicht in der *Beweistheorie*, sondern in der Theorie der *Attribution*.

4. Eine relativistische Attributionstheorie. Auf dem Wege zu dieser Lösung legen wir eine an G. Frege orientierte *relativistische* Theorie der Attribution zugrunde.[3] Nach Frege sind ja Sachverhalte zu unterscheiden von Tatsachen, d.i. von *bestehenden* Sachverhalten. Innerhalb der (Sach)verhalte wiederum sind die „einfachen“ auszuzeichnen. Das sind genau diejenigen, die in ein „Item“, d.i. einen logischen Träger, und ein Attribut zerlegbar sind: Attribut Item

[1] In beiden Ansätzen werden zwar ausschließlich *Relationen* „beschrieben“, nach dem Hilbertschen Verständnis beschreiben (mathematische) Axiome aber nicht spezifisch Relationen, sondern allgemein k-stellige Attribute mit $k \geq 1$. Worin die Besonderheit einer *mathematischen* Axiomatisierung, d.i. einer bzgl. Relationen, d.h. für $k \geq 2$, bestehen soll, ist nicht ersichtlich.

[2] Die logische Struktur eines Inhaltes muß ja sowieso klar sein, *ehe* er als Interpretat auftreten kann.

[3] S. dazu z.B. M.H., EfK. Dort werden klassische Attributionstheorien als ungenügend aufgewiesen.

(einfacher) Verhalt

Item, Attribut und einfacher Verhalt sind so drei aneinander gebundenen Rollen. Sie treten daher nur gemeinsam auf. Ihr Verhältnis zueinander ist das der Attribution.[1] Diese ist nach Frege *die* „logische Grundbeziehung". Aus dieser Einsicht ergibt sich

Lemma 3.5 : Jede logische Einheit ist durch die Attribution zu erfassen.

Damit haben wir eine hinreichende und notwendige Bedingung für den Status einer Einheit, d.h. eines logischen Gegenstandes, und somit ein ***Einheitskriterium***:[2]

Lemma 3.6 : Jede logische Einheit ist Item, Attribut oder Verhalt.

Die drei in einer Attribution verbundenen Einheiten sind dabei stets voneinander verschieden. Jede Einheit muß also als solche durch *zwei* andere gestützt werden. Der Status einer Einheit ist somit nicht beliebig oder durch Verweis auf eine vorgebliche Realität zuzusprechen, sondern allein durch Bezug auf andere logische Einheiten; das Einheitskriterium ist somit relativistisch.

Ein einfacher Verhalt ist zwar i.a, nicht eindeutig in Item und Attribut zerlegbar, wohl aber gilt umgekehrt

Lemma 3.7 : Jeder (einfache) Verhalt ist durch ein Item a und ein Attribut f eindeutig bestimmt und somit darstellbar als f(a).

Also genügt es, allein Items und Attribute zu betrachten. Damit ist nun die Besetzung von Rollen rein *relativ* zu regeln, und zwar durch die einzige Bedingung:

(3.1) Keine Einheit kann sowohl Attribut als auch (einfacher) Verhalt sein.

Somit nimmt jede Einheit maximal zwei der drei Rollen ein.[3] Insbesondere kann jedes Attribut F zudem Item zu anderen Attributen sein. Dabei sind zweierlei Attribute zu unterscheiden: Die Attribute ´ist partikulär erfüllt`, ´ist universell erfüllt` und deren Modifikationen liefern (angewandt auf Attribute) *generelle*, alle andern *singuläre* Verhalte. Danach gilt

Lemma 3.8 : Jeder einfache Verhalt ist entweder singulär oder generell.

Auch jede Relation R ist *sowohl* Attribut *als auch* Item. Im ersten Fall ergibt sich für sie ein Verhalt der Gestalt $R([a_1,...,a_k])$, im zweiten ein Verhalt der Gestalt f(R). Dabei sind die Attribute genereller Verhalte wie

$\exists X\ R(X)$ ´R ist partikulär erfüllt` oder $\forall X\ R(X)$ ´R ist universell erfüllt`

nicht *nur* auf Relationen, sondern auch auf 1-stellige Begriffe anwendbar. Ist ein Attribut f *nur* auf Relationen anwendbar, heißt der Verhalt f(R) ein „Relationsurteil".[4] Danach gilt

Lemma 3.9 : Relationsurteile sind stets singulär.

Damit ist Lemma 3.3 präzisierbar zu

Satz 3.10 : Inhaltliche mathematische Axiome sind stets Relationsurteile.

Jede Relation ist also weitgehend – wenn auch nicht notwendig eindeutig – charakterisierbar durch die Items, auf die sie anwendbar ist, *und* die (spezifischen) Attribute, die auf sie anwendbar sind. Beide Aspekte werden wir daher im folgenden für einzelne Relationen untersuchen.

Items einer k-stelligen Relation sind ausschließlich k-Tupel $[a_1,...,a_k]$, d.i. Tupel von k (nicht notwendig verschiedenen) Einheiten a_i. Ein solches a_i eines Tupels ist nach Lemma 3.7 eine Einheit genau dann, wenn es mit einem 1-stelligen Attribut f_i einen Verhalt $f_i(a_i)$ bildet. Danach ist für jede k-stellige Relation in ihrer Rolle als *Attribut*

---

[1] Für die Attribution ist also die (später zu fassende) Extension und damit jede Tatsache irrelevant.

[2] Für die Fregesche *absolute* Einteilung in zweierlei Einheiten, Begriffe und Gegenstände ist ein solches Kriterium unhaltbar.

[3] Dadurch ist ein Kategoriensystem konstruierbar, in dem jede Einheit genau einen Platz hat. Zum Entwurf eines solchen Systems siehe M.H., EfK.

[4] Damit unterscheiden wir eine prädikatenlogische Sprache mit *Item*variablen, angedeutet durch Buchstaben wie X,Y,.. von einer mit *Individuen*variablen angedeutet duch Buchstaben wie x,y,....

zweierlei zu klären: erstens, welche Einheiten Argumente der i-ten Stelle dieser Relation sind, zweitens, *welche* der Argumente in einem k-Tupel ein Item zu ihr bilden.

Jedes *Attribut* einer k-stelligen Relation in einem Relationsurteil ist zwar anwendbar höchstens auf k-stellige Relationen, es muß aber nicht auf *jede* solche Relation anwendbar sein. So ist etwa die Symmetrie ´(x)(y). r(x,y) $\rightarrow$ r(y,x)` ein Relationsattribut ´sym(r)`, das anwendbar ist ausschließlich auf 2-stellige Relationen mit nur *einem* Argumentbereich, denn jedes Argument x der ersten muß ja auch Argument der zweiten, und jedes Argument y der zweiten auch Argument der ersten Stelle sein.

§ 4 Elementschaftsrelation

1. Element, Menge, Klasse. Diese allgemeinen Überlegungen sind nun für die Mengenlehre zu nutzen. Denn im Zentrum einer axiomatisierten Mengenlehre steht ja eine *Relation*, die 2-stellige „<u>Elementschaftsrelation</u>“ $\in$[-,-]. Wir tragen dem Rechnung, indem wir ´Menge` und ´Element` in Abhängigkeit von dieser Relation einführen: Jedes *Argument* der ersten Stelle der Relation nennen wir „<u>Element</u>“, jedes der zweiten „<u>Menge</u>“. ´Menge` und ´Element` sind demnach – in Übereinstimmung mit Satz 1.1 – *keine Begriffe* wie z.B. ´Mann` oder ´Knabe`, sondern – in Übereinstimmung mit Bemerkung 2.3 – aufeinander bezogene *Rollen* wie ´Vater` und ´Sohn`.[1] Zwar definierte auch Zermolo (siehe § 2.3) ´Menge` und ´Element` relational, er definierte sie dabei aber *extensional*. Nicht die *Rollen* der $\in$-Relation heißen dort ´Menge` bzw. ´Element`, sondern deren *tatsächliche* Träger.

Nach unserer Definition ist die in der traditionellen Mengenlehre besonders strittige Frage der Anerkennung gewisser Konstrukte als Mengen völlig von der Mengenlehre zu trennen. Denn nach dieser Definition ist zum einen *nicht* irgendeine Einheit zuerst eine *Menge* und tritt dann zudem als Argument der $\in$-Relation auf;[2] zum andern ist es danach unmöglich, eine Menge – etwa durch Zusammenfassung von Elementen – zu *generieren* und dadurch eine *Einheit* zu gewinnen.[3] Sondern es kann umgekehrt nur eine (bereits vorliegende) Einheit den Status einer *Menge* erreichen, d.h. Argument der $\in$-Relation sein. Denn die Träger der Rollen einer Relation müssen, wie bereits Cantor betont,[4] (als Argumente) je *Einheiten* sein. Die Frage, *weshalb* sie *Einheiten* sind, d.h. (nach dem Einheitskriterium) welches 1-stellige Attribut auf sie anwendbar ist, muß dabei bereits vorher und unabhängig von der Mengenlehre, ja sogar unabhängig von anderen Items geklärt sein; der Einheitsstatus sowohl jedes potentiellen Elementes als auch jeder potentiellen Menge muß ohne Bezug auf irgendein Item gesichert sein. Eine Menge muß demnach keine ´Vielheit` sein. Denn wie ein Mann nicht eine Vielheit ist, wenn er als *Vater* in Relation zu vielen *Kindern* steht, so ist eine Einheit nicht eine Vielheit, wenn sie als *Menge* in Relation zu vielen *Ele-*

[1] Dabei ist zwar Begriffen und Rollen gemeinsam, dass sie stets mindestens paarweise auftreten; jeder Begriff hat mindestens *ein* Kontrarium, jede Rolle einer Relation hat mindestens *eine* Partnerrolle. So ist etwa ´Frau` konträr zu ´Mann` und die Rolle ´Sohn` eine Partnerrolle zu ´Vater`.

Doch unterscheiden sich Begriff und Rolle in der Extension. Denn zum einen *müssen* zwar weder die Kontraria noch die Relation (und damit die Rollen) eine nichtleere Extension haben, doch können die *Kontraria* je einzeln und unabhängig voneinander eine nichtleere Extension haben, während die Extension der *Rollen* aneinander gebunden ist; sie ist für alle k Rollen einer k-stelligen Relation leer oder für alle gefüllt. Zum andern müssen die Extensionen der *Kontraria* disjunkt sein – niemand kann sowohl Mann als auch Frau sein –, während die Extensionen der *Rollen* nicht disjunkt sein müssen – derselbe Mann kann zugleich Vater sein und Sohn sein. Bei symmetrischen Relationen übernehmen sogar beide Träger miteinander beide Rollen, bei reflexiven übernimmt derselbe Träger beide Rollen.

[2] So stellt repräsentativ z.B. W. Felscher, NMaZ S.32f das Verständnis der naiven Mengenlehre dar.

[3] W. Quine,MiL S. 176 „Wir dürfen nicht meinen, Klassen würden durch Beschreibung *geschaffen*.“

[4] So etwa in seiner bekannten Charakterisierung (1.1).

menten steht. Ob eine Einheit (als Menge) Elemente hat oder auch nur haben kann, ist eine eigene Frage, die auf ihren Einheitsstatus keinen Einfluß hat.

Infolgedessen kann eine *Klasse keine* logische Einheit sein, denn jede – selbst die leere – Klasse ist als solche allein durch Bezug auf ihre Mitglieder definiert. So ist etwa die *Extension* eines Attributes definiert als *diejenigen* Items, auf die es zutrifft; ein gemeinsames Attribut oder irgendeine andere Bedingung macht aber in keinem Fall *mehrere* Einheiten zu *einer*:

Satz 4.1 : Eine Klasse ist *keine* logische Einheit.

Ist eine Klasse aber keine Einheit, dann kann sie weder Item eines Attributes noch Argument (einer Relation) sein. Zwischen einer Klasse und einem ihrer Mitglieder ist demnach keine Relation möglich.[1] Also folgt

Satz 4.2 : Eine ´Klasse` kann weder eine ´Menge` noch ein ´Element` sein.[2]

2. Die ∈-Relation als Attribut. Die bisher behandelte Einheitsbedingung gibt für jedes Argument jeder Relation lediglich eine *notwendige* Bedingung vor; sie ist also dafür nur eine Mindestbedingung. Als zweite Bedingung ist zu beachten, dass Argumente einer Relation stets nur innerhalb eines Items dieser Relation, d.h. im Tupel auftreten. Nur die in solchen Tupeln vertretenen Einheiten sind Argumente. Für jede spezielle 2-stellige Relation, so auch für die ∈-Relation ist also zu klären, welche *Bitupel* von Einheiten Items zu ihr sind. Dies wird durch die Intension der Relation festgelegt. Ein *Beispiel* eines Verhalts mit der ∈-Relation als Attribut ist etwa

´∈(A.Einstein,Berliner Philharmoniker)` ´A.Einstein ∈ Berliner Philharmoniker`

Auch die Intension ist weitgehend mit *formalen* Mitteln darzulegen: Da jedes Argument als Einheit nach dem Einheitskriterium Item zu mindestens einem 1-stelligen Attribut ist, kann man mittels dieser 1-stelligen Attribute Elemente und Mengen voneinander scheiden. So kann man etwa fordern, dass die zwei Argumente der ∈-Relation nicht Items zu demselben Attribut sind.[3]

Eine andere formale intensionale Vorgabe wäre etwa die, ob die beiden Argumente der ∈-Relation *gleich* sein können oder nicht. Dabei ist keine der beiden möglichen Vorgaben falsch oder richtig; es liegen lediglich bei verschiedener Intension verschiedene ∈-Relationen vor. Allgemein gilt[4] lediglich

Lemma 4.3 : Argumentbereiche einer Relation sind gleich oder disjunkt.

Falls für die ∈-Relation gefordert wird, dass ihre Argumentbereiche disjunkt sind, ist sowohl ´$a\in a$` als auch ´$a\notin a$` sinnlos; sind sie dagegen gleich, sind ´$a\in a$` und ´$a\notin a$` im Einzelfall stets wahr oder falsch und somit *nie* sinnlos. In der konventionellen Theorie der Mengenlehre wird i.a. dieser zweite Fall angenommen; es tritt jeweils nur *eine* Art von Objekten auf. Einige Autoren dagegen unterscheiden die beiden Argumentbereiche, jedoch nicht in der Konsequenz des o.g. Lemmas 4.2.[5]

3. Die ∈-Relation als Item. Nach Verhalten, in denen die ∈-Relation als *Attribut* auftritt, betrachten wir nun solche, in denen sie als *Item* auftritt. Wir stellen sie je-

---

[1] Umgekehrt kann eine *Menge* natürlich durchaus der (evtl. einzige) Inhalt einer *Klasse* sein, etwa von $\{x;a\in x\}$, d.h. der Klasse aller Mengen, deren Element a ist.

[2] Dieses Ergebnis widerspricht der Grundbehauptung W. Quines in MiL „Die Mengenlehre ist Mathematik der Klassen".

[3] Damit wäre ohne Bezug auf die Existenzfrage die Russellsche Antinomie unmöglich.

[4] siehe dazu M.H., Kon

[5] So nimmt etwa J.von Neumann eine Cantorsche Unterscheidung zwischen Menge (Einheit) und Klasse (Vielheit) wieder auf und läßt als *Elemente* nur Mengen zu, während als *Mengen* auch Klassen auftreten können. J.von Neumann, AdM. Da jedoch nur *Einheiten* Argumente sein können, ist der Ansatz unhaltbar.

weils auf zweierlei Weisen dar, in der Sprache der Prädikatenlogik und in einer natürlichen Sprache. Beispiele sind etwa die Relationsurteile

(4.1)	$(x)(Ey).\ x\in y$	Die $\in$-Relation ist linkstotal.
(4.2)	$(Ey)(x).\ x\in y$	Die $\in$-Relation ist rechtsuniert.
(4.3)	$(y)(Ex).\ x\in y$	Die $\in$-Relation ist rechtstotal.
(4.4)	$(x)(y).\ x\in y \mid y\in x$	Die $\in$-Relation ist asymmetrisch.
(4.5)	$(x)(y).\ x\in y \mid x=y$	Die $\in$-Relation ist irreflexiv.
(4.6)	$(x)(y)(z).\ (x\in y \wedge y\in z) \mid x\in z$	Die $\in$-Relation ist atransitiv.

Dabei sind für eine $\in$-Relation mit nur einem Argumentbereich *alle* genannten Verhalte definiert, während für eine $\in$-Relation mit zwei disjunkten Argumentbereichen die Verhalte (4.4)ff nicht definiert sind. Welcher dieser und ähnlicher Verhalte mit der $\in$-Relation als Item *besteht*, kann hier außer Betracht bleiben.

Vergleichen wir damit die Axiome (2.0)ff des Zermolo-Systems:

Nach dem „Existenzaxiom" (2.0) ist die Extension der $\in$-Relation nicht leer. Ein solches Axiom aufzustellen, ist Zermolo aufgrund seiner extensionalen Definition von ´Menge` und ´Element` gezwungen. Doch besagt dieses Axiom nichts anderes als: ´$\in$[-,-] ist partikulär erfüllt`. (2.0) ist also ein generelles, und somit kein Relationsurteil und daher nach Satz 3.10 kein mathematisches Axiom.

In (2.1) stellt ´$(x).(x\in y\leftrightarrow x\in z)\rightarrow y=z$` kein Attribut dar, denn nach Anwendung auf zwei Individuen a und b wäre $(x).(x\in a\leftrightarrow x\in b)\rightarrow a=b$ einerseits ein einfaches *singuläres*, andrerseits ein einfaches *generelles* Urteil; jedes einfache Urteil ist aber nach Lemma 3.8 *entweder* singulär *oder* generell.

In (2.2) kommen mit x und y Variable vor, die nicht Argumente der $\in$-Relation sind. Unzulässigerweise wird darin nämlich entscheidend vorausgesetzt, dass *jede* Einheit Argument der 1. Stelle der $\in$-Relation ist. In (2.2) wird also keine Relation beschrieben. Weil aber in Axiomen ausschließlich Relationen beschrieben werden, ist daher (2.2) kein Axiom. Die Generierung von Mengen ist somit auch axiomatisch nicht zu ermöglichen.

(2.5) ist kein mathematisches Axiom, da darin mit F (Prädikatenlogik 2.Stufe) ein Attribut auftritt, das nicht Attribut einer Relation ist.

(2.6) ist kein mathematisches Axiom, da darin eine Konstante wie $\varnothing$ nicht auftreten darf. Die Problematik der zusätzlichen Relation $\cup$ dürfen wir daher übergehen.

Demnach sind von den o.g. Zermolo-"Axiomen" nur (2.3) und (2.4) Relationsurteile als inhaltliche Axiome geeignet. Zudem werden wir das unzulässige Axiom (2.1) später durch ein zulässiges Axiom mit demselben Inhalt ersetzen.

§ 5 Relationen der Mereologie

1. Die Teil-Relation, Durchschnitt und Vereinigung. Die *eigentliche* Mengenlehre ist eine Theorie ausschließlich der $\in$-Relation, wie die Theorie der natürlichen Zahlen eine ausschließlich der Nachfolger-Relation ist. Ebenso wie dort die Theorie auf weitere Relationen – wie etwa Ordnungs- oder Verknüpfungsrelationen – auszudehnen ist, kann auch hier die Mengenlehre um weitere Relationen ergänzt werden. Die Theorie dieser zusätzlichen Relationen ist aber hier wie dort gesondert, d.h. unabhängig von der $\in$- bzw. der Nachfolger-Relation, zu entwickeln.

Die Theorie der $\in$-Relation wird so erweitert um die der Mereologie. Diese ist charakterisierbar durch die „Teil-Relation" sowie die Relationen „Durchschnitt" und „Vereinigung". Diese sind (*intensional*) nicht durch die $\in$-Relation definierbar. Wir können und müssen sie daher völlig unabhängig von dieser betrachten.

Die „<u>Teil-Relation</u>" T[-,-] erfasst die Beziehung eines Teiles zu einem Ganzen. Auch sie ist 2-stellig; auch ihre Argumente „<u>Teil</u>" der ersten und „<u>Ganzes</u>" der zweiten Stelle müssen je Einheiten sein; auch Teil und Ganzes sind nur (aufeinander bezogene) *Rollen*. Ihre Träger treten daher nur im Bitupel auf und sind so – als Bitupel – Items zur Teil-Relation. Diese Relation hat unbestritten nur einen Argumentbereich; d.h. jede Einheit, die Teil (irgendeines Ganzen) sein kann, kann auch Ganzes (irgendeines Teiles) sein. Ob sie es tatsächlich *ist*, ist ja dafür unerheblich.

Beispiele von Verhalten mit einer T-Relation als *Attribut* sind etwa:

´Das Adriatische Meer ist Teil des Mittelmeeres`

´Der Kölner Dom ist Teil der Cheopspyramide`

Beispiele von Verhalten mit einer Teil-Relation als *Item* sind etwa:

(5.1) $(x)(y).\ (T(x,y) \wedge T(y,x)) \rightarrow x=y$ Die Teil-Relation ist identitiv.

(5.2) $(x)(y)(z).\ (T(x,y) \wedge T(y,z)) \rightarrow T(x.z)$ Die Teil-Relation ist transitiv.

Die Durchschnitts-Relation“ $\cap[-,-,-]$ und die „Vereinigungs-Relation“ $\cup[-,-,-]$ sind je *3-stellig*.[1] Sie haben jeweils nur *einen* Argumentbereich, d.h. jedes Argument einer Stelle ist auch Argument jeder der beiden andern. Beispiele von Verhalten mit diesen Relationen als *Attributen* sind etwa

´$\cap$[Adriatisches Meer,Mittelmeer,Rotes Meer]`

´*Ein* Durchschnitt zwischen Adriatischem Meer und Mittelmeer ist das Rote Meer`

´$\cup$ [Adriatisches Meer,Mittelmeer,Mittelmeer]`

´*Eine* Vereinigung zwischen Adriatischem Meer und Mittelmeer ist das Mittelmeer`

Beispiele von Verhalten mit diesen Relationen als *Items* sind etwa:

(5.3) $(x)(y)(Ez).\ \cup(x,y,z)$ Die Vereinigung ist linksbitotal.

(5.4) $(w)(x)(y)(z).\ [\cup(w,x,y) \wedge \cup(w,x,z)] \rightarrow y=z$ Die Vereinigung ist rechtseindeutig.

(5.5) $(x)(y)(z)(u)(v)(w).\ [\cup(x,y,u) \wedge \cup(y,z,v)] \rightarrow [\cup(u,z,w) \leftrightarrow \cup(x,v,w)]$ Die Vereinigung ist assoziativ.

(5.6) $(x)(y)(z).\ \cup(x,y,z) \rightarrow \cup(y,x,z)$ Die Vereinigung ist (links)kommutativ.

(5.7) $(Ex)(y).\ \cup[x,y,y]$ Die Vereinigung ist linksteilduplikativ.

Die analogen Verhalte ergeben sich mit der Relation des *Durchschnitts* als Item.

Das neutrale Element ist offenbar für jede der beiden Relationen eindeutig bestimmt. Das bzgl. der Vereinigung nennen wir „Nichts“, das bzgl. des Durchschnitts „Total“. (5.7) kann also für die Vereinigungs- bzw. Durchschnittsrelation nur dann bestehen, wenn Total und Nichts je Argumente und damit je Einheiten sind. Sie sind je Einheiten, insofern sie je mit einem 1-stelligen Attribut einen Verhalt bilden. Beispiele für solche (sogar bestehende) Verhalte damit sind etwa

Das Nichts ist (rot und ¬rot). Das Total ist (rot oder ¬rot).

mit den komplexen Begriffen (rot und ¬rot)(x) bzw. (rot oder ¬rot)(x).[2]

2. Relations*tupel* als Items. Bisher haben wir nur Verhalte betrachtet, deren Item eine einzige Relation war; nun führen wir Beispiele von Verhalten an, deren Item ein *Tupel* von Relationen ist.

(i) Ein solches Bitupel ist etwa ´[$\cap,\cup$]`, gebildet aus der Durchschnitts- und der Vereinigungsrelation. Falls die beiden Relationen auf *demselben* Argumentbereich definiert sind, ergeben sich damit etwa die Verhalte:

(5.8) $(x)(y)(z)(u)(v)(w)(t).\ [\cup(x,y,z) \wedge \cap(t,x,u) \wedge \cap(t,y,u)] \rightarrow [\cap(t,z,w) \leftrightarrow \cup(u,v,w)]$ ´ist (links)distributiv [$\cap,\cup$]`

(5.9) $(x)(y)(z).\ \cup(x,y,z) \rightarrow \cap(x,z,x)$ ´ist (links)adjunktiv [$\cap,\cup$]`

(5.10) $(x)(y)(Eu)(Ev).\ \cup(x,y,u) \leftrightarrow \cap(x,y,v)$ ´ist komplementär [$\cap,\cup$]`

(5.11) $(Ex)(y).\ \cup(y,x,x) \wedge \cap(x,y,y)$ ´ist coneutral [$\cap,\cup$]`

---

[1] Auch sie sind natürlich nur auf *Einheiten* und somit z.B. nicht auf Klassen definiert. Es ist somit nicht möglich, z.B. die Extension des komplexen Begriffes $f \wedge g$ aufzufassen als Durchschnitt der Extensionen der Begriffe f und g.

[2] Die heute übliche extensionale von Wahrheitswerten abhängige „Definition“ von Junktionen ist dabei durch eine intensionale zu ersetzen, die die Junktion auch von *Begriffen* ermöglicht.

(ii) Nun nennen wir Beispiele einfacher Verhalte, deren Item ein Bitupel aus der Teil-Relation und einer der beiden 3-stelligen Relationen $\cap,\cup$ ist:

(5.12) $(x)(y)(z).\ \cup(x,y,z) \rightarrow T(x,z)$ ´ist mitläufig $[T,\cup]$`

(5.13) $(x)(y)(z)(u).\ (T(x,y) \wedge \cup(y,z,u)) \rightarrow T(x,u)$ ´ist erweiternd $[T, \cup]$`

(5.14) $(x)(y)(z).\ \cap(x,y,z) \rightarrow T(z,x)$ ´ist gegenläufig $[T,\cap]$`

(5.15) $(x)(y)(z)(u).\ (T(u,x) \wedge T(u,y) \wedge \cap(x,y,z)) \rightarrow T(u,z)$ ´ist einstrahlend $[T,\cap]$`

(iii) Schließlich nennen wir ein Beispiel eines einfachen Verhalts mit dem Tripel $[T,\cap,\cup]$ aus drei Relationen als Item:

(5.16) $(x)(y)(u)(v)(w).(\cap(x,y,v) \wedge \cup(x,y,w))\rightarrow(T(u,v)\rightarrow T(u,w))$ ´ist zielkonform $[T,\cap,\cup]$`

3. Die Teilmengen-Relation. Die Teil-, die Durchschnitts- und die Vereinigungs-Relation haben ja nur *einen* (gemeinsamen) Argumentbereich; i.a. ist dieser verschieden von jedem der Argumentbereiche der $\in$-Relation. Er *muß* aber *nicht* davon verschieden sein, sondern kann für gewisse Teil-Relationen *gleich* sein mit dem der 2.Stelle der $\in$-Relation, d.h. dem der Menge; in diesem Fall heißt die Teil-Relation eine „Teil*mengen*-Relation“ $\subseteq[-,-]$. Die Teilmengen-Relation wird also nicht extensional, sondern mit Rückgriff allein auf die Teil- und die $\in$-Relation definiert. Das neutrale Element bzgl. der *Vereinigung* von Teilmengen heißt dann „leere Menge“ $\varnothing$. Danach ist die leere Menge eine logische Einheit.[1] Als neutrales Element ist sie aber an eine bestimmte Relation und somit an deren Argumentbereich gebunden; sie ist eine eindeutig bestimmte Einheit aus diesem Argumentbereich in gleicher Weise wie etwa die ´0` als neutrales Element bzgl. der Addition auf den *ganzen Zahlen* eine ganze Zahl ist, während der 0-Vektor als neutrales Element bzgl. der Addition auf *Vektoren* ein Vektor ist. Eine Einheit $\varnothing$ wäre also nur dann eindeutig bestimmt, wenn nur *eine* einzige Teil-Relation T und nur *eine* einzige $\in$-Relation aufträten.[2]

Ein Beispiel eines Verhalts mit dem Bitupel $[\in,\subseteq]$ aus Elementschafts- und Teilmengen-Relation als *Item* ist

(5.17) $(x)(y)(z).\ (x\in y \wedge y\subseteq z) \rightarrow x\in z$ ´ist saltiv $[\in,\subseteq]$`

Liegen Durchschnitt und Vereinigung nicht nur auf Teilen, sondern sogar auf Teil*mengen* vor, kann auch die $\in$-Relation in Tupeln mit ihnen auftreten. Beispiele von Verhalten mit solchen Tupeln als Items sind etwa

(5.18) $(x)(y)(z)(u).\ (\in(x,y) \wedge \cup(y,z,u)) \rightarrow \in(x,u)$ ´ist erweiternd $[\in,\cup]$`

(5.19) $(x)(y)(z)(u).\ (\in(u,x) \wedge \in(u,y) \wedge \cap(x,y,z)) \rightarrow\in (u,z)$ ´ist einstrahlend $[\in,\cap]$`

(5.20) $(x)(y)(u)(v)(w).(\ \cap(x,y,v) \wedge \cup(x,y,w)) \rightarrow (\in(u,v)\rightarrow\in(u,w))$ ´ist zielkonform $[\in,\cap,\cup]$`

Ein Beispiel eines einfachen Verhalts mit dem Quadrupel $[\in,\subseteq,\cup,\cap]$ als Item ist:

(5.21) $(u)(Ex)(Ey)(Ez)(v)(w).\ y\neq u \wedge \in(x,y) \wedge \cap(u,z,v) \wedge \cup(u,z,w) \wedge [\subseteq(y,v) >\!\!-\!\!< \subseteq(y,w)]$ ´ist integrativ $[\in,\subseteq,\cap,\cup]$`

§ 6 Ein formales Axiomensystem der Mengenlehre

1. Relationseigenschaften. Nachdem wir bisher Relations*urteile* betrachtet haben, wenden wir uns nun den *Attributen* dieser Urteile zu. Diese sind entweder Relationseigenschaften (einzelner Relationen) oder Relationen-Relationen (von Relationentupeln). Dafür gilt, wie an anderer Stelle[3] gezeigt, im Anschluß an Lemma 3.10

Satz 6.1 : Genau die Relationsattribute sind potentiell (*attributiv*) *formale* mathematische Axiome.

[1] Anders als die *extensionale* Zermolo-Definition der leeren Menge (vgl. Bem. 2.3) ist diese Definition also haltbar.

[2] Eine leere *Klasse* ist dagegen nicht einmal eine Einheit und daher a fortiori nicht eindeutig.

[3] M.H., FAA

Eine Auswahl solcher Relationsattribute liefern die o.g. einfachen Verhalte mit der $\in$-Relation, der Teil-Relation, Durchschnitt oder Vereinigung bzw. Tupeln daraus als Item. Attribute der **$\in$-Relation**[1] sind danach z.B. folgende Relationseigenschaften:

(6.1) $(x)(Ey).\ r_1(x,y)$ ´ist linkstotal(r_1)`

(6.2) $(Ey)(x).\ r_1(x,y)$ ´ist rechtsuniert(r_1)`

(6.3) $(y)(Ex).\ r_1(x,y)$ ´ist rechtstotal(r_1)`

(6.4) $(x)(y).\ r_1(x,y) \mid r_1(y.x)$ `ist asymmetrisch($r_1$)`

(6.5) $(x)(y)(z).\ [r_1(x,y) \wedge r_1(y,z)] \mid r_1(x,z)$ `ist atransitiv($r_1$)`

(6.6) $(y)(z)(Ex).\ y \neq z \leftrightarrow [r_1(x,y) >\!\!-\!\!< r_1(x,z)]$ ´rechtsschwacheindeutig(r_1)`[2]

(6.7) $(x)(Ez)(y)(Eu).\ r_1(y,z) \leftrightarrow (r_1(y,u) \wedge r_1(u.x))$ ´ist diffusionsresistent(r_1)`

(6.8) $(x)(Ez)(y)(u).\ r_1(y,z) \leftrightarrow (r_1(u,y) \rightarrow r_1(u,x))$ ´ist potenzierend(r_1)`

Die beiden letztgenannten Eigenschaften erhält man, indem man die Zermolo-Axiome (2.3)f als Relationseigenschaften begreift.

In gleicher Weise treten als Attribute der **Teil- und der Teil*mengen*-Relation** z.B. folgende Relationseigenschaften[3] auf:

(6.9) $(x)(y).\ (r_2(x,y) \wedge r_2(y,x)) \rightarrow x=y$ ´ist identitiv(r_2)`

(6.10) $(x)(y)(z).(\ r_2(x,y) \wedge r_2(y,z)) \rightarrow r_2(x.z)$ ´ist transitiv(r_2)`

(6.11) $(y)(z)(Ex).\ r_2(x,y) \wedge r_2(x,z)$ ´ist linksvernetzt(r_2)`

(6.12) $(x)(y)(Ez).\ r_2(x,z) \wedge r_2(y,z)$ ´ist rechtsvernetzt (r_2)`

Weiter treten als Attribute der **Vereinigungs- oder der Durchschnitts-Relation** z:B folgende Relationseigenschaften auf:

(6.13) $(x)(y)(Ez).\ r_3(x,y,z)$ ´ist linksbitotal (r_3)`

(6.14) $(w)(x)(y)(z).\ (r_3(w,x,y) \wedge r_3(w,x,z)) \rightarrow y=z$ ´ist rechtseindeutig (r_3)`

(6.15) $(x)(y)(z)(u)(v)(w).(\ r_3(x,y,u) \wedge r_3(y,z,v)) \rightarrow (r_3(u,z,w) \leftrightarrow r_3(x,v,w))$ ´ist assoziativ (r_3)`

(6.16) $(x)(y)(z).\ r_3(x,y,z) \rightarrow r_3(y,x,z)$ ´ist (links)kommutativ (r_3)`

(6.17) $(Ex)(y).\ r_3(x,y,y)$ ´ist linksteilduplikativ (r_3)`

2. Relationen-Relationen. Nach den Relations*eigenschaften* einzelner Relationen führen wir Beispiele von Relationen-*Relationen* an, die als Attribute von k-Tupeln dieser Relationen auftreten. So ergeben sich als Attribute der einfachen Verhalte (5.8)ff die folgenden Relationen-Relationen:

2-stellige Relationen-Relationen sind z.B.

(6.18) $(x)(y)(z).\ (r_1(x,y) \wedge r_2(y,z) \rightarrow r_1(x,z)$ ´ist saltiv (r_1,r_2)`

(6.19) $(x)(y)(z)(u).\ (r_1(u,x) \wedge r_1(u,y) \wedge r_3(x,y,z)) \rightarrow r_1(u,z)$ ´ist einstrahlend (r_1,r_3)`

(6.20) $(x)(y)(z).\ r_3(x,y,z) \rightarrow r_2(x,z)$ ´ist mitläufig(r_2,r_3)`

(6.21) $(x)(y)(z).\ r_4(x,y,z) \rightarrow r_2(z,x)$ ´ist gegenläufig (r_2,r_4)`

(6.22) $(x)(y)(z)(u)(v)(w)(t).\ [r_4(x,y,z) \wedge r_3(t,x,u) \wedge r_3(t,y,u)] \rightarrow [r_3(t,z,w) \leftrightarrow r_4(u,v,w)]$
´ist (links)distributiv (r_3,r_4)`

(6.23) $(x)(y)(z).\ r_3(x,y,z) \rightarrow r_4(x,z,x)$ ´ist (links)adjunktiv (r_3,r_4)`

(6.24) $(x)(y)(Eu)(Ev).\ r_3(x,y,u) \leftrightarrow r_4(x,y,v)$ ´ist komplementär(r_3,r_4)`

(6.25) $(Ex)(y).\ r_3(y,x,x) \wedge r_4(x,y,y)$ ´ist coneutral (r_3,r_4)`

Eine 3-stellige Relationen-Relation ist z.B.

(6.26) $(x)(y)(u)(v)(w).(r_3(x,y,v) \wedge r_4(x,y,w)) \rightarrow (r_1(u,v) \rightarrow r_1(u,w))$ ´ist zielkonform (r_1,r_3,r_4)`

Eine 4-stellige Relationen-Relation ist z.B.

(6.27) $(u)(Ex)(Ey)(Ez)(v)(w).\ y \neq u \wedge r_1(x,y) \wedge r_3(u,z,v) \wedge r_4(u,z,w) \wedge [r_2(y,v) >\!\!-\!\!< r_2(y,w)]$
´ist integrativ (r_1,r_2,r_3,r_4)`

---

[1] Dabei gehen wir mit Lemma 4.3 aus von einer $\in$-Relation mit nur einem Argumentbereich.

[2] Diese (mittels der Kontravalenz „>—<“ formulierte) Eigenschaft ersetzt die unzulässige des sog. Extensionalitätsaxioms (2.1).

[3] Wegen r(x,x) =: f(x) ist (x). r(x,x) aufzufassen als (x). f(x) und damit als ´f(x) ist universell erfüllt`. Die sog. Eigenschaft der Reflexivität bezieht sich somit nicht auf die 2-stellige Relation r(x,y), sondern ist lediglich ein generelles Urteil über den Begriff f(x).

Jedes Relationsattribut gibt einen Aspekt der Intension seines Trägers, d.h. einer Relation bzw. eines Relationstupels an. Der Inhalt des Relationsattributs bezieht sich dabei stets auf die Extension und zwar die gesamte Extension dieses Trägers, d.h. der Relation(en). Er besteht jeweils in einem bestimmten Muster, das einen Aspekt der Lage der Extension innerhalb des Itembereichs angibt. Der Aspekt der Symmetrie etwa betrifft ausschließlich 2-stellige Relationen mit nur einem Argumentbereich. Die Symmetrie trifft auf eine solche Relation R(-,-) genau dann zu, wenn mit einem Bitupel [a,b] stets auch das Bitupel [b,a] in ihrer Extension liegt.

Jeder solche Aspekt kann, muß aber nicht gesehen werden. Ebenso wie jedes kategoriale Attribut erst vorliegt, insofern es begrifflich gefaßt ist, liegt auch jedes Relationsattribut erst vor, wenn es als solches begriffen wird.[1] Dabei ist die Sprache Prädikatenlogik hilfreich; dadurch wird deutlich, dass jedes Relationsattribut mittels logischer Junktionen begreifbar bzw. darstellbar ist. Daraus erwächst der programmatische Auftrag an die Mathematik, solche Attribute aufzufinden und sie zu gliedern.[2]

Nach Satz 6.1 ist nun zwar jede der o.g. Relationsattribute ein formales Axiom. Es kann aber, wie gerade gezeigt, ein formales Axiom nicht *nur* durch Formalisierung eines *inhaltlichen,* sondern auch direkt gewonnen werden.

3. Systeme und Strukturen. Nun ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine Sammlung von Relationsattributen ein Axiomen*system* ist. Diese Bedingungen sind keine *Wahrheits-*, sondern Anwendbarkeits-, d.h. Variablenbedingungen. Jede Klasse von Attributen, von denen (mindestens) eines alle k (verschiedenen) in den Attributen auftretende Individuenvariablen enthält, nennen wir ein „Profil“. Es heißt dann „k-stämmig“. Ein Profil, in dem jedes *Argument* auch *Item* eines Attributes dieses Profils ist, heißt ein „System“. So ist z.B.

´ist älter als (x_1,x_2)`, ´ist weiß($x_1$)`, ´ist schwarz(x_3)`	kein Profil,
´ist älter als (x_1,x_2)`, ´ist weiß($x_1$)`, ´ist schwarz(x_1)`	ein Profil, aber kein System,
´ist älter als (x_1,x_2)`, ´ist weiß($x_1$)`, ´ist schwarz(x_2)`	ein 2-stämmiges System.

Jedes System von *Relationsattributen* schließlich heißt eine „Struktur“. Damit gilt[3]

Satz 6.2 : Genau die Strukturen sind (potentiell) formale mathematische Axiomensysteme.

Ist die Struktur k-stämmig, nennen wir auch das Axiomensystem k-stämmig. Aus jedem inhaltlichen ergibt sich so ein (attributiv) *formales* Axiomensystem. Es ist manchmal – so in der Mengenlehre – nach dem inhaltlichen benannt, obgleich es (anders als das *inhaltliche*) nicht an bestimmte Relationen, und schon gar nicht an deren Argumente – etwa die Mengen – gebunden ist.

Mit den formalen *Axiomen* müssen also auch die formalen Axiomen*systeme* nicht durch Formalisierung *inhaltlicher* gewonnen werden; sie sind als Strukturen unabhängig davon. Daraus folgt[4], dass Strukturen als solche gleichrangig sind. Keine Struktur ist als solche vor einer anderen ausgezeichnet. Gleiches gilt dann auch für mathematische Axiomensysteme und Theorien:

Satz 6.3 : Sämtliche axiomatisierbaren mathematischen Theorien sind – abgesehen von Teiltheorien – gleichrangig.

Die *reine* Mathematik versucht dann, ausgehend von gewissen – in formalen Axiomen formulierten – Grundstrukturen, Abhängigkeiten zwischen solchen Strukturen aufzudecken. Die *angewandte* Mathematik versucht zu zeigen, dass gewisse Struktu-

[1] Dazu ist stets mindestens eine Relation bzw. ein Tupel anzugeben, worauf es anwendbar ist.
[2] Wir können hier nicht im Entferntesten einen solchen umfassenden Aufbau von Relationsattributen angehen, sondern beschränken uns darauf, lediglich Attribute einiger weniger Pertinenzklassen vorzustellen, die für die Struktur der Teilmengenlehre relevant sind.
[3] gemäß M.H., FAA
[4] siehe dazu M.H., FAA

ren auf gewisse Relationen *zutreffen*. So gehören z.B. die Gruppen- und die Körpertheorie zur reinen, die Geometrie zur angewandten Mathematik. Eine Struktur liegt dabei stets ausschließlich auf Relationen, nicht auf deren Trägern. Eine Ordnungsstruktur etwa liegt auf der Größer-Relation, nicht aber auf den natürlichen Zahlen.

4. 1- und mehrstämmige Strukturen. Auch die Mengenlehre gehört natürlich, insofern sie eine bestimmte Relation, die $\in$-Relation, betrifft, zur *angewandten* Mathematik. Ihre Strukturen aber sind mittels *reiner* Mathematik zu untersuchen. Eine solche Struktur wollen wir hier darlegen. Dabei gilt zunächst

Lemma 6.4 : Eine Sammlung 1-stelliger Relationsattribute ist eine Struktur, genau dann, wenn sie sämtlich zueinander soziabel sind.

So bildet jede Auswahl der Relationseigenschaften (6.1)-(6.8) eine 1-stämmige Struktur, weil die $\in$-Relation Item zu jeder von ihnen ist. In gleicher Weise bildet, gestützt auf die Teil-Relation, jede Auswahl der Relationseigenschaften (6.9)-(6.12) eine 1-stämmige Struktur. Schließlich bildet, gestützt auf die Vereinigungs-Relation, jede Auswahl der Relationseigenschaften (6.13)-(6.17) eine 1-stämmige Struktur.

In entsprechender Weise sind nun aus den Relationseigenschaften und geeigneten Relationen-Relationen aus (6.18)ff *mehrstämmige* Strukturen zu gewinnen. Jede k-stämmige Struktur setzt ja k Relationen in Beziehung zueinander. Dazu sind nach Definition mehrere Bedingungen zu erfüllen: Zunächst muß mindestens eine k-stellige Relationenrelation Attribut eines k-Tupel dieser k Relationen sein. Weiter müssen sämtliche in der Struktur auftretende Argumente der k Relationen, d.h. sämtliche Individuenvariablen, in dieser Relationenrelation vorkommen. Schließlich muß jede der k Relationen mit mindestens einer Relationseigenschaft in der Struktur vertreten sein. Damit ist z.B. jede 3-stämmige Struktur und also nach Satz 6.2 jedes k-stämmige Axiomensystem auf den Relationen r_1,r_2,r_3 in folgender Weise zu gliedern:

Relationseigenschaften von r_1,
Relationseigenschaften von r_2,
Relationseigenschaften von r_3.
(6.28) Relationenrelationen mit den Argumenten $r_1$und r_2,
Relationenrelationen mit den Argumenten r_1 und r_3,
Relationenrelationen mit den Argumenten r_2 und r_3,
Relationenrelationen mit den Argumenten r_1,r_2 und r_3.

5. Zur Teilmengen-Struktur. Danach bilden die folgenden Relationsattribute zusammen eine 4-stämmige Struktur:

die Relationseigenschaften (6.4)-(6.9) einer Relation r_1,
die Relationseigenschaften (6.10)f einer Relation r_2,
die Relationseigenschaften (6.14)-(6.18) einer Relation r_3,
die Relationseigenschaften (6.14)-(6.18) einer Relation r_4,
die Relationen-Relation (6.18) von r_1,r_2,
die Relationen-Relation (6.19) von r_1,r_3,
(6.29) die Relationen-Relationen (6.20) von r_2,r_3,
die Relationen-Relationen (6.21) von r_2,r_4,
die Relationen-Relationen (6.22)-(6.25) von r_3,r_4,
die Relationen-Relation (6.26) von r_1,r_3,r_4,
die Relationen-Relation (6.26) von r_2,r_3,r_4,
die Relationen-Relation (6.27) von r_1,r_2,r_3,r_4.

Sie trifft zu auf das Quadrupel [$\in$,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]. Es trägt daher eine Teilmengen-Struktur.[1] Somit gilt mit Satz 6.2

[1] Die Eigenschaften (6.1)ff können auf die $\in$-Relation nicht zutreffen, falls sie gemäß (6.4) asymmetrisch und damit irreflexiv ist.

Satz 6.5 : Die Struktur (6.29) ist (potentiell[1]) ein Axiomensystem der Teilmengenlehre.

Die Attribute eines Profils und insbesondere die einer Struktur sind stets durch geeignete logische Relationen miteinander zu verknüpfen.[2] Danach gilt

Bemerkung 6.6 : Jede k-stämmige Struktur ist auch als ein *einziges* k-stelliges Relationsattribut aufzufassen.

§ 7 Zur Gliederung und Bewertung von Strukturen

1. Teil- und Unterstrukturen. Nachdem formale mathematische Systeme als *Strukturen*, d.h. als Klassen von Relationsattributen, begrifflich gefaßt sind, können wir diese nun zu gliedern versuchen. Dazu stützen wir uns auf

Lemma 7.1 : Sämtliche Attribute sind aufteilbar in Klassen zueinander soziabler Attribute,[3] d.h. von Attributen mit demselben Itembereich.

Dies gilt insbesondere für die Attribute einer *Struktur*; sie sind aufteilbar in Klassen zueinander soziabler Attribute. Für die weiteren Untersuchungen können wir daher nun auf die Theorie soziabler Attribute zurückgreifen. Ein Attribut heißt „komplex", wenn es bzgl. einer (logischen) Relation wie etwa der Konjunktion zerlegbar ist, sonst „einfach". Damit sind sämtliche Attribute und insbesondere sämtliche *Relations*attribute einer Struktur reduzierbar auf *einfache* Attribute. Jede Struktur ist also zu reduzieren auf Klassen einfacher soziabler Relationsattribute. Jede solche Klasse nennen wir einen „Komplex". Jede k-stämmige Struktur zerfällt also nach Definition in *mindestens* k+1 Komplexe, nämlich einen, dessen Relationen-Relationen je dieselben k Variablen $r_1,...,r_k$ enthalten und k Komplexe, deren Relationen je eine der Variablen $r_1,...,r_k$ enthalten. I.a. treten zusätzlich noch weitere Komplexe auf, deren Relationen je eine Auswahl der Variablen $r_1,...,r_k$ enthalten. Die Struktur (6.29) z.B. ist nach Komplexen geordnet.

Nun ist eine Gliederung der Strukturen möglich aufgrund ihrer Einteilung

a) nach Stämmigkeit und

b) nach den auftretenden Komplexen:

Dazu nennen wir **a)** jede k-stämmige Struktur A eine „Teilstruktur" einer Struktur B, wenn diese mindestens (k+1)-stämmig ist und zudem sämtliche Relationsattribute von A enthält. Jede (k+1)-stämmige Struktur ist also aus Strukturen geringerer Stämmigkeit und einer (k+1)-stelligen Relationen-Relation aufgebaut. So bilden z.B.

die Relationseigenschaften (6.10)f einer Relation r_2,
die Relationseigenschaften (6.14)-(6.18) einer Relation r_3,
die Relationseigenschaften (6.14)-(6.18) einer Relation r_4,
(7.1) die Relationen-Relationen (6.22) von r_2,r_3,
die Relationen-Relationen (6.23) von r_2,r_4,
die Relationen-Relationen (6.24)ff von r_3,r_4,
die Relationen-Relation (6.28) von r_2,r_3,r_4

[1] d.h. es ist möglich, sie an den Beginn einer axiomatischen Theorie zu stellen.

[2] So ergibt sich etwa durch die Konjunktion
´ist eine Verknüpfung (r)` := ´ist linksbitotal $\wedge$ rechtseindeutig (r)`,
´ist eine Halbgruppe (r)` := ´ist eine Verknüpfung $\wedge$ assoziativ (r)`.
´ist komm. Halbgruppe mit neutr. Element(r)`:= ´ist komm.Halbgr. $\wedge$ linksduplikativ (r)`
´ist halbboolsch(r_3,r_4)`:=´ist (links)distrib. $\wedge$ (links)adjunktiv $\wedge$ komplementär$\wedge$coneutral ($r_3,r_4$)`
´ist boolsch (r_3,r_4)` := ´ist halbboolsch und ist halbboolsch$^{-1}$ ($r_3,r_4$)`
Ein Beispiel ist der einfache Verhalt ´ist boolsch [$\cup,\cap$]`.
Die *Inversion* ist eine Operation auf 2-stelligen Relationen, die die beiden Argumente vertauscht; daher bestimmt jede 2-stellige Relation R eindeutig ihre inverse R^{-1}.
Auf eine ausführliche Diskussion solcher Relationen verzichten wir aber hier.

[3] Siehe dazu M.H., Kon S.57 ff.

eine 3-stämmige Struktur. Sie trifft zu auf das Tripel [T,$\cap$,$\cup$]. Es ist daher eine Struktur der Mereologie. Aus dem Vergleich mit (6.29) folgt

Satz 7.2 : Eine Struktur der $\in$-Relation und eine der Mereologie sind je Teilstrukturen der Teilmengen-Struktur.

In gleicher Weise bilden die

(7.2)
die Relationseigenschaften (6.14)-(6.18) einer Relation r_3,
die Relationseigenschaften (6.14)-(6.18) einer Relation r_4,
die Relationen-Relationen (6.22)ff von r_3,r_4

eine 2-stämmige Struktur. Sie heißt ein „Boolscher Verband“ und trifft zu z.B. auf das Bitupel [$\cap$,$\cup$]. Aus dem Vergleich mit (7.1) folgt

Satz 7.3 : Der boolsche Verband ist Teilstruktur einer mereologischen Struktur.

Natürlich sind jeweils auch die darin enthaltenen 1-stämmigen Strukturen Teilstrukturen der mehrstämmigen. Das Teilstruktur-Verhältnis hat somit in den 1-stämmigen Strukturen eine untere Grenze. Es hat aber keine prinzipielle obere Grenze; denn allgemein sind mit Hilfe von Relationen-Relationen höherer Stelligkeit sehr ausladende Strukturen zu entwerfen; für jede von ihnen muß lediglich die Attribut-Bedingung erfüllt sein, d.h. mindestens ein Relationen-Tupel vorliegen, auf das sie anwendbar ist.

Das Untergliederungsverfahren **b)** hebt ab auf die *innerhalb eines Komplexes* vorkommenden Relationsattribute. Wir nennen eine Struktur A eine Oberstruktur“ einer Struktur B, wenn sie zum einen dieselben Argumente hat wie diese und zum andern keine zusätzlichen Relationsattribute enthält. B heißt dann umgekehrt eine „Unterstruktur“ von A. Eine Struktur B ist genau dann eine „echte“ Unterstruktur einer Struktur A, wenn (mindestens) ein Komplex von B *echt* in einem von A enthalten ist. Daher hat jede Struktur i.a. mehrere nicht disjunkte Unterstrukturen. So ergeben sich z.B. Unterstrukturen, wenn man von den o.g. Relationsattributen (6.1) ff einige streicht.

Diese beiden Einteilungsverfahren **a)** und **b)** sind dabei unabhängig voneinander; jede Struktur kann i.a. sowohl *Teil*struktur als auch *Unter*struktur sein. Umgekehrt hat aber sicher *nicht* jede Struktur eine Teil- oder eine Unterstruktur. Der Aufweis von *Teil*strukturen endet bei Relationseigenschaften, der Aufweis von *Unter*strukturen bei atomaren Strukturen; „atomar“ nennen wir jede Struktur, die *keine* Unterstruktur hat. Nach Definition umfaßt jede atomare 1-stämmige Struktur genau *ein*, jede atomare k>2-stämmige Struktur genau k+1 Relationsattribute, nämlich eine einfache k-stellige Relationen-Relation und k einfache Relationseigenschaften.

2. Zur Widerspruchsfreiheit von Strukturen. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun mathematische Axiomensysteme qualifizieren. Als Strukturen sind sie ja Attribute, und als Attribute sind sie je auf gewisse Items anwendbar. Daher sind sie nun als Attribute auf ihre Existenz zu untersuchen. Es gilt ja

Lemma 7.4 : Ein Attribut existiert genau dann, wenn es Attribut in einem bestehenden Verhalt ist.

Danach existiert eine Struktur genau dann, wenn ihre Extension nicht leer ist. Wird also ein Item aus dieser Extension angegeben, ist die Existenz der Struktur nachgewiesen. Zu untersuchen bleibt daher der Fall, dass ein solches Item (noch) nicht vorliegt. Dies kann dreierlei Gründe haben:

(i) Ein solches Item kann gar nicht auftreten, denn die Attribute der Struktur sind inkompatibel.[1]

[1] Dabei heißen zwei Attribute f und g „inkompatibel“, wenn sie durch eine (3-stellige) logische Operation zu einem Attribut h zu verbinden sind und die Extension von h notwendig leer ist. So sind z.B. f und $\neg$f inkompatibel, denn die Extension von h:= f$\wedge\neg$f ist notwendig leer. Die Inkompatibilität von Attributen ist also rein attributbezogen und unabhängig vom Träger.

(ii) Die Attribute der Struktur sind zwar kompatibel, doch die Extension *ist* leer.
(iii) Die Extension ist nicht leer, doch ist noch kein Item daraus gefunden worden.

Strukturen, deren Extension notwendig leer ist, heißen „widersprüchlich“, die anderen „widerspruchsfrei“. Innerhalb einer widersprüchlichen Struktur sind diejenigen einfachen Attribute zu isolieren, die zueinander inkompatibel sind. Danach ist es möglich, – auf mehrere Weisen – eines oder mehrere dieser Attribute zu streichen, sodass die verbleibenden Attribute kompatibel sind. Dabei ist eine weitere Einteilung der einfachen Attribute hilfreich:

Die *einfachen* Attribute sind in disjunkte Klassen zueinander „pertinenter“ Attribute einzuteilen,[1] wobei diese Einteilung i.a. tief liegende Untersuchungen erfordert. Auf zueinander pertinenten Attributen ist dann die 2-stellige Relation der „Kontrarietät“ definiert. Diese führt stets zu Widersprüchlichkeit:

Satz 7.5 : Eine Struktur ist widersprüchlich, wenn einer ihrer Komplexe konträre Attribute enthält.[2]

Daraus ergibt sich direkt

Folgerung 7.6 : Ein formales mathematisches Axiomensystem ist widersprüchlich, wenn einer seiner Komplexe konträre Axiome enthält.[3]

Es können aber nach Definition auch Attribute inkompatibel sein, die nicht pertinent, ja nicht einmal soziabel sind. Allgemein trifft aber auf ein Item aus jeder Pertinenzklasse höchstens ein Attribut zu. Darüber hinaus gilt nach dem Kontrarietätstheorem[4]

Lemma 7.7 : Jedes existierende Item trägt aus jeder Pertinenzklasse darauf anwendbarer Attribute genau ein Attribut.

Damit sind aus den isolierten inkompatiblen Attributen einer Struktur *stets* einige zu streichen, derart dass zum einen die verbleibenden kompatibel sind und zum andern deren maximale Stelligkeit nicht reduziert wird:

Satz 7.8 : Jede widersprüchliche Struktur hat (mindestens) eine widerspruchsfreie Unterstruktur.

Da sie sämtlich eine nichtleere Extension haben, sind die o.g. Axiomensysteme gemäß Lemma 7.4 widerspruchsfrei.

3. Zur Vollständigkeit von Strukturen. Das *Unter*struktur-Verhältnis hat selbstverständlich eine logische untere, aber auch eine logische *obere* Schranke. Dieses Verhältnis bezieht sich ja auf die Zu- bzw. Abnahme der Attribute innerhalb eines Komplexes. Ein Komplex (einfacher soziabler Attribute) heißt „vollständig“ oder „kategorisch“, wenn er aus jeder möglichen Pertinenzklasse (dieser Soziabilitätsklasse) mindestens ein Attribut enthält.[5] Dementsprechend nennen wir ein Profil und somit insbesondere eine Struktur „vollständig“, wenn sie je einen der kombinatorisch möglichen Komplexe enthält und jeder dieser Komplexe vollständig ist. Damit gilt

Satz 7.9 : Die Vollständigkeit einer Struktur ist unabhängig von ihrer Existenz.

---

[1] Pertinent zueinander sind z.B. alle Farben, alle Gewichte, alle Temperaturen usw.

[2] Siehe dazu M.H., Kon S. 66. Die Kontrarietät ist also primär nicht zwischen Formeln, Aussagen oder Urteilen definiert, sondern zwischen einfachen Attributen.
Bei Hilbert wird der Widerspruch dagegen primär zwischen *Formeln* definiert: Zwei Formeln sind widersprüchlich, wenn „die eine die Negation der andern ist“ D.Hilbert, GdM S.18.

[3] Den *Modellen* eines formalen Axiomensystems im Hilbertschen Sinne entsprechen damit die Elemente der *Extension* in unserem Sinne; ein widerspruchsfreies System muß weder ein Modell haben, noch eine nichtleere Extension.

[4] Diese Verknüpfung des „Satzes vom Widerspruch“ und des verallgemeinerten „Satzes vom ausgeschlossenen Dritten“ wird bewiesen in M.H., Kon S.92 ff.

[5] Im Hilbertschen Sinne heißt ein System „kategorisch“, wenn alle seine Modelle *isomorph* sind. Die Kategorizität wird dort also semantisch definiert.

Somit ist jedes Item *umfassend* höchstens durch ein vollständiges und widerspruchsfreies Profil zu beschreiben.[1] Insbesondere folgt

Satz 7.10 : *Umfassend* ist eine Relation bzw. ein Relationen-Tupel höchstens durch e eine vollständige und widerspruchsfreie Struktur zu beschreiben.

Damit ergibt sich

Satz 7.11 : Widerspruchsfrei und vollständig sind höchstens Strukturen ohne *echte* Unterstruktur

Lemma 7.5 sichert nun zusammen mit Satz 7.6

Satz 7.12 : Jede widerspruchsfreie Struktur hat (mindestens) eine *vollständige* und widerspruchsfreie Unterstruktur.

Daraus ergibt sich

Theorem 7.13 : Jedes widerspruchsfreie formale mathematische Axiomensystem ist zu einem widerspruchsfreien *vollständigen* Axiomensystem ergänzbar.

Daraus folgt nach Definition der Relationsattribute, dass die Extension jeder Relation bzw. jedes Relationstupels durch (allgemeine !) Relationsattribute vollständig beschreibbar ist. Nur aufgrund ihrer Relationseigenschaften ist eine Relation ja aufzufassen und sinnvoll anzuwenden. Eine extensional, d.h. durch beliebige Extensionstupel definierte Relation wäre unbegreiflich.

Nun wird ein (widerspruchsfreies) k-stämmiges Axiomensystem einerseits um so stärker, je mehr Attribute ihm hinzugefügt werden; denn je mehr Axiome gegeben sind, um so mehr weitere Attribute sind ja aus dem Axiomensystem ableitbar. Andrerseits wird mit jeder Erweiterung einer Struktur durch ein zusätzliches Attribut die Extension tendenziell kleiner; die Wahrscheinlichkeit, dass sie leer ist, nimmt zu:

Satz 7.14 : Die Extension einer Oberstruktur umfaßt die ihrer Unterstrukturen.

Nach unserer Definition beziehen sich die Begriffe der Vollständigkeit und der Widerspruchsfreiheit allein auf die Attribution und die Extension von Attributen. Sie benötigen noch keinen Folgerungsbegriff. Dieser muß und darf erst für das *Beweisen* etwa der Widerspruchsfreiheit nicht aber bereits vorher zur Definition von Vollständigkeit und Widerspruch herangezogen werden. Mit Hilfe dieses bedeutend voraussetzungsvolleren Begriffs der Folgerung sind später „unabhängige“, dh. ökonomisch besonders knappe Darstellungen derselben Struktur zu gewinnen. Darauf gehen wir aber hier nicht ein.

4. Zur topologischen Struktur. Aus diesen Überlegungen ergeben sich zwei – einander entgegengesetzte – Wege, zu einem weit reichenden Axiomensystem zu gelangen: Entweder entwickelt man eine möglichst elaborierte Struktur und versucht (etwa durch den Nachweis, dass ihre Extension nicht leer ist) ihre Widerspruchsfreiheit zu beweisen, oder man beschreibt möglichst vollständig die Struktur einer existierenden Relation bzw. eines Relationen-Tupels. Im ersten Fall geht man von einem Attribut aus und versucht ein Item der Extension zu finden, im zweiten Fall geht man von einem existierenden Item aus und versucht möglichst alle seine Attribute anzugeben.

Ein Vollständigkeitsbeweis ist aber in beiden Fällen nicht nötig, denn anders als Hilbert gemäß (1.3) wohl meinte, muß durch ein Axiomensystem eine Beziehung *nicht vollständig* beschrieben werden.[2] Um die Vollständigkeit einer Struktur bzw. eines Axiomensystems z.B. der Teilmengenlehre beweisen zu können, müßten wir auf eine Übersicht über sämtliche in Frage kommenden Pertinenzklassen zurückgrei-

[1] Diese Beschreibung ist aber i.a. nicht eindeutig. Es ist nicht nötig, eine solche Eindeutigkeit anzunehmen, und es ist, anders als Leibniz meinte, nicht opportun, presst es doch die Begriffe in ein an die (vorgebliche) Existenz gebundenes Zwangssystem.

[2] Vgl. auch Hilbert, HP S.36f: Bei der Untersuchung der Grundlagen einer Wissenschaft „hat man ein System von Axiomen aufzustellen, welche eine genaue und *vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen* enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen jener Wissenschaft stattfindet.“

fen können. Obwohl diese Übersicht, wie oben gesagt, noch aussteht, können wir aber vermöge Satz 7.11 die *Unvollständigkeit* einer Struktur aufzeigen, indem wir eine echte Unterstruktur zu ihr angeben.

Dies ist möglich im Falle der Teilmengenstruktur. Eine Unterstruktur zu ihr ist charakterisierbar durch die zusätzliche Relationseigenschaft

(7.3) $(x)(u)(Ev)(y).\ r_1(x,u) \rightarrow [r_1(x,v) \wedge v{\neq}u \wedge r_1(y,v) \rightarrow r_1(y,u)]$ ´ist protopologisch(r_1)`

Fügt man sie der Teilmengenstruktur (6.29) hinzu, erhält man eine sog. „topologische" Struktur. Sie ist anwendbar z.B. auf das Quadrupel ´[$\in$,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]`. Es folgt

Satz 7.15 : Eine topologische Struktur ist eine Unterstruktur der Teilmengenstruktur.

Da (7.3) auf die $\in$-Relation zwar anwendbar ist, aber nicht auf sie zutrifft, ist die oben definierte topologische Struktur zwar anwendbar auf das Quadrupel ´[$\in$,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]`, trifft aber nicht darauf zu. Gesucht wird nun eine 2-stellige Relation R derartig, dass die topologische Struktur auf das Quadrupel ´[R,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]` zutrifft und damit diese Struktur insbesondere widerspruchsfrei ist. Als eine solche Relation kommt in Frage z.B. die Relation „wird umgeben von (-,-)", falls sie eine Spezifizierung der $\in$-Relation, d.h. ihr untergeordnet ist, d.h. falls für sie gilt

(7.4) ´[wird umgeben von $\rightarrow \in$](X)` ist universell erfüllt d.h.
$\forall$X [wird umgeben von $\rightarrow \in$](X)

Jedes Argument der zweiten Stelle dieser Relation heißt „Umgebung", jedes der ersten nennen wir „Punkt" (der Umgebung). Jede Umgebung ist also eine Menge, jeder Punkt ein Element.

Zu klären ist nun, ob das Quadrupel ´[wird umgeben von,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]` eine topologische Struktur hat, d.h. ob diese auf das Quadrupel zutrifft.

Dazu prüfen wir zunächst, ob die Eigenschaften (6.4)-(6.8) auf die Umgebungsrelation zutreffen.[1] Dies folgt mit (7.4) aus dem Zutreffen dieser Eigenschaften auf die $\in$-Relation: Denn Asymmetrie, Atransitivität und schwache Eindeutigkeit bleiben ja bei beliebiger Einschränkung der Extension erhalten; Diffusionsresistenz und Potenz gelten für jede Spezifizierung der $\in$-Relation. Offen bleibt, ob die Eigenschaft (7.3) auf die Umgebungsrelation zutrifft, d.h. ob der folgende einfache Verhalt besteht:

(7.5) (x)(u)(Ev)(y). x wird umgeben von u $\rightarrow$ [x wird umgeben von v $\wedge$ v$\neq$u
$\wedge$ (y wird umgeben von v $\rightarrow$ y wird umgeben von u)]

Nun untersuchen wir, ob die Relationenrelationen (6.18)f,(6.26) und (6.29) zutreffen:

Die Anwendung von (6.18)f auf ´[wird umgeben von, $\subseteq$]` liefert die beiden Verhalte

(7.6) (x)(y)(z). [x wird umgeben von y $\wedge$ y$\subseteq$z] $\rightarrow$ x wird umgeben von z
´ist saltiv (wird umgeben von, $\subseteq$)`
d.h. ´Ist eine Umgebung y von x Teilmenge von z, dann ist auch z Umgebung von x.

(7.7) (x)(y)(z)(u). (u wird umg. von x $\wedge$ u wird umg von y $\wedge$ x$\cap$y=z) $\rightarrow$ u wird umg. von z
´ist einstrahlend (wird umgeben von, $\cap$)`
d.h. ´Der Durchschnitt zweier Umgebungen von x ist eine Umgebung von x.`

Die Anwendung von (6.26) auf ´[wird umgeben von,$\cap$,$\cup$]` liefert den Verhalt

(7.8) (x)(y)(u)(v)(w).(x$\cap$y=v $\wedge$ x$\cup$y=w)$\rightarrow$(u wird umg. von v $\rightarrow$ u wird umg. von w)
´ist zielkonform (wird umgeben von,$\cap$,$\cup$)`
d.h. Ist ein Durchschnitt zweier Umgebungen eine Umgebung eines Punktes u, dann auch die Vereinigung dieser Umgebungen.

---

[1] Ist ein Attribut einem andern *untergeordnet*, hat es zwar denselben Itembereich wie dieses, eine (i.a. echt) kleinere Extension. Die Extension von ´karminrot` z.B. ist kleiner als die von ´rot`.

Im Falle der Attribute von *Relationen* betreffen solche Attribute ja stets das Muster der *Extension* dieser Relationen (innerhalb ihres Itembereichs). Da die Extension einer untergeordneten Relation (i.a. echt) innerhalb jeder ihr übergeordneter liegt, sind die Muster der beiden Extensionen i.a. verschieden. So ist z.B. die Relation ´ist verwandt mit (-,-)` symmetrisch, die ihr untergeordnete Relation ´ist Vorfahr von (-,-)` asymmetrisch. Die Attribute, die auf ein untergeordnetes Relationenattribut zutreffen, sind also i.a. nicht aus denen eines ihm übergeordneten abzuleiten.

Die Anwendung von (6.29) auf ´[wird umgeben von,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]` liefert den Verhalt

(7.9) (u)(Ex)(Ey)(Ez)(v)(w). $y \neq u \wedge$ x wird umgeben von y $\wedge$ [$y \subseteq u \cap z$ >—< $y \subseteq u \cup z$] ´ist integrativ [wird umgeben von,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]`

Zu jeder Umgebung u gibt es eine davon verschiedene Umgebung y, die entweder im Durchschnitt oder in der Vereinigung von u mit einer Umgebung z liegt

Das Quadrupel ´[wird umgeben von,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]` trägt also eine topologische Struktur, falls (7.4) wahr ist und die Verhalte (7.5)-(7.9) bestehen. Davon bestehen die beiden Verhalte (7.8)f, dh.

´ist zielkonform (wird umg.von,$\cap$,$\cup$)` und ´ist integrativ [wird umg.von,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]`,

falls (7.4) wahr ist und die Verhalte

´ist zielkonform ($\in$,$\cap$,$\cup$)`und ´ist integrativ($\in$,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$)`

bestehen. Damit trägt das Quadrupel ´[wird umgeben von,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]` eine topologische Struktur, falls das Quadrupel ´[$\in$,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]` eine Teilmengenstruktur trägt, (7.4) wahr ist und die drei Verhalte (7.5)-(7.7) bestehen. Diese vier Bedingungen sind (in dieser Reihenfolge) Inhalt der vier sogenannten „Hausdorffschen Umgebungsaxiome“:

(7.10) ´x ist Element jeder seiner Umgebungen`

(7.11) ´Zu jeder Umgebung u von x gibt es mindestens eine Umgebung v von x, sodass u auch Umgebung jedes Elementes y von v ist.`

(7.12) ´Jede Menge z mit einer Umgebung y von x als Teilmenge ist Umgebung von x`.

(7.13) ´Der Durchschnitt zweier Umgebungen von x ist eine Umgebung von x.`

Davon entspricht (7.10) als Umformulierung von (7.4) keinem Relationsurteil (mit einer Relationseigenschaft als Attribut), sondern einem *generellen* Urteil und ist daher *kein* inhaltliches Axiom. Dadurch wird nämlich lediglich ein (Unterordnungs)-Verhältnis zwischen zwei pertinenten Relationen fixiert, nicht aber ein Attribut von Relationen angegeben. Die drei Verhalte (7.5)/(7.11), (7.6)/(7.12) und (7.7)/(7.13) sind dagegen inhaltliche Axiome. Falls sie bestehen, trägt das Quadrupel ´[wird umgeben von,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]` eine topologische Struktur. Damit ergibt sich dann

Folgerung 7.16 : Die topologische Struktur ist widerspruchsfrei.

Da sie eine echte Unterstruktur der Teilmengenstruktur ist, folgt

Satz 7.17 : Die o.g. Teilmengenstruktur (6.29) ist nicht vollständig.

Die topologische Struktur ist aber – wie jede Struktur – nicht notwendig an ein spezielles Tupel gebunden; ihre Extension enthält nicht nur das Quadrupel ´[wird umgeben von,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]`, sondern z.B. auch das Quadrupel ´[wird umfaßt von,$\subseteq$,$\cap$,$\cup$]`. Dabei begreifen wir die Relation „wird umfaßt von (-,-)“ als eine Spezifizierung der $\subseteq$-Relation, d.h. als ihr untergeordnet. Für sie gilt demnach

´[wird umfaßt von $\rightarrow$ $\subseteq$](X)` ist universell erfüllt d.h.

(7.14) $\forall$X [wird umfaßt von $\rightarrow$ $\subseteq$](X)

Das Verhältnis zwischen ´wird umfaßt von` und ´$\subseteq$` ist also analog zu dem zwischen ´wird umgeben von` und ´$\in$`. Damit gilt auch

Satz 7.18 : Die Teilmengenrelation hat in topologischer Hinsicht keine Sonderstellung.

§ 8 Ergebnis

1. Mengen und Klassen. Die Mengenlehre gilt vielen heute als eine Basistheorie der Mathematik. Wie die klassischen Basistheorien Geometrie und Arithmetik ist sie eine *inhaltliche* Theorie. Jene behandelten geometrische Figuren bzw. Zahlen, diese sog. Mengen. Letztere mögen zwar allgemeiner sein als erstere, sind jedoch nicht weniger inhaltlich. Dies wird deutlich an den verzweifelten Versuchen, aus dem Mengenbegriff erwachsende Antinomien zu vermeiden und den Begriff der Menge so zu schärfen, dass er definit ist. Nur dann ist er ja als Basisbegriff tauglich. Wie zuerst David Hilbert pointiert herausgestellt hat, untersucht die Mengenlehre aber ebenso wie die alten Basistheorien nicht die Gegenstände selbst, sondern *Beziehungen* zwischen ihnen. Die Mengenlehre thematisiert und präzisiert das Enthaltensein und damit eine 2-stellige Relation.

Dadurch ist der Fehler der ursprünglichen Mengenauffassung zu beheben. Anders als etwa eine Zahl tritt eine Menge dann nämlich nicht *absolut* auf, sondern nur als eine Rolle (einer Relation). Was aber in eine Rolle eintritt, muß bereits vorher eine logische Einheit sein. Wie z.B. ein Vater nicht als solcher existieren kann, sondern nur als *Mann*, der die Vaterrolle trägt, mögen demnach Mengen existieren, jedoch nicht als solche, sondern nur als Einheiten, die die Mengenrolle tragen. Denn existieren kann nur, was eine logische Einheit ist.

Das o.g. Problem des *Begriffs* der Menge ist also aufgespalten in ein mathematisches der Thematisierung einer Relation und ein logisch-philosophisches der Suche nach einer Einheitsbedingung, d.h. nach einer notwendigen und hinreichenden Bedingung für den Status einer Einheit. Dadurch hat die Mengenlehre ihre angenommene nur auf dem *Begriff* der Menge gründende Sonderstellung bereits verloren, mögen die Protagonisten der Mengenlehre bei ihrer Suche nach Einschränkungen der Mengenbildung die Tragweite dieser Verschiebung von einer absoluten zu einer relativen Definition einer Menge auch übersehen.

Damit erweist sich der Status einer *Einheit* als die entscheidende (notwendige) Bedingung für den Status einer Menge. Eine Ansammlung von Einheiten dagegen ist als solche keine Einheit, und dies unabhängig davon, wie viele bzw. welche Einheiten sie umfaßt. Jede solche Ansammlung nennen wir eine *Klasse*. Eine Klasse ist also in keinem Fall eine Menge. Jede Extension ist nun ein Beispiel einer Klasse, denn jede Extension ist eine (maximale) Ansammlung von Einheiten, die unter einen bestimmten Begriff fallen. Damit sind nicht nur die Extensionen gewisser problematischer Begriffe keine Mengen, sondern keine einzige Extension ist eine Menge. So sind etwa *die natürlichen Zahlen* eine Klasse; auch die Extension des Begriffs ´∈(A.Einstein,-)` ist eine Klasse, nämlich eine Klasse, die nur Mengen enthält.

Während also eine *Menge* stets notwendigerweise eine Einheit ist, da nur Einheiten Rollen tragen können, ist eine *Klasse* stets eine (potentielle) Vielheit und, selbst wenn sie nur genau eine Einheit enthält, niemals selbst eine Einheit.[1] Umgekehrt kann eine Einheit wohl (etwa als Menge) viele Elemente enthalten oder (als Ganzes) in viele Teile zerlegbar sein, ist aber damit keine Vielheit. Keine Klasse ist durch einen definitorischen Akt zu einer Einheit zu machen; es ist nicht möglich, Einheiten zu einer neuen Einheit zu kombinieren.

Wohl aber sind beliebige Einheiten zu einer Klasse zusammenzufassen. Sie müssen nicht einmal ein gemeinsames Attribut tragen oder auch nur tragen können. Als solche ist eine Klasse also keine Extension und somit insbesondere nicht die eines speziellen Begriffs ´∈(-,M)` mit einer Menge M. Aus dieser Beliebigkeit folgt, dass eine Klasse als solche nicht eine Einheit, etwa eine Menge oder ein Attribut bestimmen kann. Darüber hinaus setzt jede Bestimmung eine Relation zwischen dem bestimmenden und dem zu bestimmenden voraus. Die Relata einer Relation müssen aber stets Einheiten sein. Da nun selbst spezielle Klassen wie etwa Extensionen oder solche, die nur eine Einheit enthalten, keine Einheiten sind, können sie somit weder eine Menge – wie im Extensionalitätsaxiom (2.1) versucht – noch ein Attribut, dessen Extension sie ist, „eindeutig bestimmen".[2]

[1] Auch in der Sprache wird dieser Unterschied peinlich beachtet: Einer Klasse entspricht stets der Plural, einer Menge stets der Singular.

[2] Dass i.a. *mehrere* Attribute – etwa ´Abendstern` und ´Morgenstern` – dieselbe Extension haben, ist dagegen ein Einwand, der nur die Tatsächlichkeit, nicht aber die Möglichkeit einer Bestimmung ausschließt.

Jeder Begriff führt somit zwar zu Klassen, so a) etwa zu seinem Itembereich, d.h. zur Klasse der Einheiten, auf die er anwendbar ist, und b) etwa zu seiner Extension, der Klasse der Einheiten, auf die er zutrifft, doch keine Klasse führt zu einem Begriff.[1] Denn im ersten Fall bestimmt der Begriff jede einzelne Einheit der Klasse, im zweiten Fall müßte die Klasse bestimmen, kann dies aber nicht, da sie keine Einheit ist.

Damit kann die Mengenlehre nicht als Grundlage, ja nicht einmal als Argument für eine extensionale Wissenschaft, etwa eine extensionale Mathematik, dienen, denn sie ist auf Extensionen schlicht nicht anwendbar. Die Verfechter einer extensionalen Mathematik müssen sich also nach anderen Begründungen umsehen, die Mengenlehre kann ihnen keine Argumente liefern.

Die die Theorie der Kardinalzahlen konstituierende Relation der Gleichmächtigkeit ist also weder auf Mengen, die ja lediglich Rollen sind, noch auf Klassen, sondern einzig (wie bei Frege) auf Attribute anzuwenden.

2. Zur „Beschreibung" von Beziehungen. Weiter hat D.Hilbert am Beispiel geometrischer Beziehungen aufgezeigt, dass Gegenstand der (reinen) Mathematik nicht die Beziehungen selbst sind, sondern allein die *Beschreibung* der Beziehungen. Eine Theorie der Mengenlehre befaßt sich also nicht mit Mengen und Elementen, sondern mit einer Beschreibung der *Beziehung* des Enthaltenseins. Mittels der axiomatischen Methode, die den Inhalt der Theorie durch Folgerungen aus wenigen Anfangsaxiomen aufbaut, kann diese Theorie wie jede mathematische Theorie systematisiert werden. Diese Axiome bilden ein *inhaltliches* Axiomensystem – und führen so zu einer *inhaltlichen* Theorie –, wenn in ihnen neben der Beschreibung auch die beschriebenen Relationen auftreten; ein *formales* Axiomensystem bilden sie, wenn in ihnen ausschließlich die Beschreibungen auftreten.

Ein inhaltliches Axiom der Addition (auf den natürlichen Zahlen) ist z.B.

(8.1) $(x)(y)(z).\ \mathrm{Add}(x,y,z) \leftrightarrow \mathrm{Add}(y,x,z)$,

ein formales

(8.2) $(x)(y)(z).\ r(x,y,z) \leftrightarrow r(y,x,z)$.

Letzteres ist ein Axiom, das zwar (teilweise) die Addition beschreibt, aber nicht mehr eines der Addition ist, sondern eines der Gruppentheorie. Es ist deshalb um eine Stufe abstrakter als das inhaltliche (der Addition). Die ersten Axiomensysteme der Mengenlehre waren inhaltlich; sie beschrieben die $\in$-Relation; später hat man (daraus) formale zu gewinnen versucht. Ein formales Axiomensystem „beschreibt" zwar die intendierten Relationen, es beschreibt sie aber i.a. nicht eindeutig; andere Relationen mögen derselben Beschreibung unterliegen. So ist z.B. neben der Addition auch die Multiplikation kommutativ.

3. Zum Verständnis der Hilbertschen „Beschreibung". Offen ist allerdings, was unter einer „Beschreibung" zu verstehen ist. Konventionell wird darunter in der Nachfolge Hilberts eine sprachliche Darstellung verstanden. (8.1) wäre demnach aufzufassen als eine *Aussage* (in einer speziellen Sprache, der Sprache PL der Prädikatenlogik), deren Zeichen ´Add` interpretierbar ist auf die Addition auf $\mathbb{N}$. Eine andere Interpretation bildet das Zeichen ´Add` auf die Multiplikation ab. Sieht man von jeder Interpretation, d.h. von jeder semantischen Betrachtung ab, bleibt der *Satz*, d.h. die zugrunde liegende rein syntaktische sprachliche Form des Ausdrucks (dieser Sprache). Dieser rein syntaktische Ausdruck gilt dann als *formal*, während der interpretierte als *inhaltlich* gilt. Das Verhältnis inhaltlich - formal liegt also innerhalb der Sprache. Der Gegenstand der formalen Mathematik liegt somit innerhalb der Syntax.

[1] Vgl. hierzu die Fregesche Polemik in G.Frege, GgdA S.2f

Die Mathematiker befassen sich danach mit der Syntax nicht etwa nur deshalb, weil sie repräsentative Beispiele mathematischer Strukturen anbietet, sondern die Mathematik liegt *nur* innerhalb der Syntax, sie tritt außerhalb ihrer nicht auf.

Dieser Ansatz reagiert also auf die Grundlagenkrise, indem er die damit sichtbar gewordenen *inhaltlichen* Probleme ignoriert bzw. auslagert. Er sieht in inhaltlichen Axiomen wesentlich Aussagen. Das Problem der Unvereinbarkeit zweier Axiome – wie der des euklidischen Parallelenaxioms und des dazu konträren elliptischen – wird dazu adäquat auf sprachlicher Ebene gelöst: sie können nicht beide unter derselben Interpretation, wohl aber unter verschiedenen Interpretationen wahr sein. Abgesehen davon, dass für Formeln wie ″(x).P(x)″ keine Interpretation angeboten wird, ist es aber fraglich, ob diese – nicht nur im Bereich der Mathematik – wohlfeile Lösung angemessen ist. Wäre sie angemessen, liegt mit der Lösung auch die Ursache des Problems in der Sprache. Dies hat, wie oben angedeutet, weitreichende ontologische Konsequenzen für den Status der Mathematik – und weit darüber hinaus. Die von Hilbert aufgedeckte Relationsbindung der Mathematik wäre zudem für die Lösung spezifisch mathematischer Probleme nicht zentral, sondern irrelevant.

Dieser Auffassung der Hilbertschen „Beschreibung“ haben wir bereits an anderer Stelle[1] eine andere gegenübergestellt, die ebenfalls bei Hilbert angelegt ist. Sie sieht das Problem nicht spezifisch in der Sprache, sondern durch die Sprache nur vermittelt. Danach sind formale Axiome Attribute, und *formale mathematische Axiome sind Attribute von Relationen*. Inhaltliche Axiome sind danach Urteile, in denen diese Attribute auf gewisse logische Gegenstände, d.h. hier auf gewisse Relationen, angewandt werden. Eine inhaltliche (axiomatische) Theorie ist ein Gebäude aus singulären(!) Urteilen, zwischen denen ein Folgerungsverhältnis besteht; eine formale (axiomatische) Theorie ist ein Gebäude aus *Begriffen*, zwischen denen ein Folgerungsverhältnis besteht.

Dieser Ansatz weicht den in der Grundlagenkrise zutage getretenen Problemen nicht aus, sondern bewältigt sie, indem er den Gegenständen der reinen Mathematik – mittels einer an G. Frege orientierten relativistischen Attributionstheorie – als Attributen von Relationen einen eigenen Status verleiht und damit auch der Hilbertschen Einsicht der Relationsbezogenheit der Mathematik Rechnung trägt. Gegenstand der reinen Mathematik sind danach Strukturen, d.h. Muster von Relationen. Jede Relation, jedes Relationstupel trägt ja ein solches Muster. Diese Muster sind eigenständige logische Gegenstände. Sie sind daher losgelöst von ihren Trägern zu untersuchen. Ihr Verhältnis zu ihren Trägern ist das der Attribution; Strukturen sind *Attribute* von Relationen. Jede Relation kann – z.B. aufgrund ihrer Stelligkeit – gewisse Strukturen tragen, andere nicht; auf jede Relation treffen gewisse Strukturen zu, andere nicht.

Danach kann man mit Relationsattributen verfahren wie mit kategorialen Attributen. Zunächst stellt man fest, dass manche Relationen gewisse Gemeinsamkeiten haben. So gilt für einige wie z.B. für die Verwandtschaft: $aR_1b \rightarrow bR_1a$; für andere wie z.B. für die Vater-Relation: $aR_2b \rightarrow \neg bR_2a$; dritte wie z.B. die Bruder-Relation sind bzgl. dieses Aspektes indifferent: $\neg(aR_3b \rightarrow bR_3a)$. Die Sprache der Prädikatenlogik erlaubte es dann, diese Eigenheiten darzustellen. Klassischen Attributionstheorien gelingt es – und zwar aufgrund ihres klassifizierenden Ansatzes – nicht, diese Gemeinsamkeiten als *Attribute* zu fassen. Man *behandelt* sie jedoch wie Attributen. So wird zum einen ausgehend von einer Relation untersucht, welche solcher Eigenschaften sie trägt, ebenso wie nach einer Beschreibung eines Gegenstandes gesucht wird, zum andern wird ausgehend von einer Sammlung von Relationseigenschaften ge-

[1] M.H., FAA

fragt, auf welche Relationen sie zutreffen. Unsere *relativistische* Attributionstheorie gestattet es nun, dies begrifflich zu erfassen. Die Ausdrücke (8.1)f sind somit alternativ formulierbar als

(8.1)´ die Addition ist kommutativ,

(8.2)´ ist kommutativ (r).

Strukturen und Relationsurteile, d.h. Urteile mit Strukturen als Attributen, sind demnach sprachlich darstellbar; sie sind aber nicht an eine Sprache oder gar an eine spezielle Sprache wie etwa die der Prädikatenlogik gebunden. Sprachen werden im Gegensatz zu reinen Zeichen durch Syntax und damit durch Struktur geprägt; Struktur ist somit für Sprache wesentlich. Umgekehrt ist aber Sprache nicht für Struktur wesentlich; so ist etwa für die Struktur der Nachfolgerrelation auf den natürlichen Zahlen jede Sprache irrelevant.

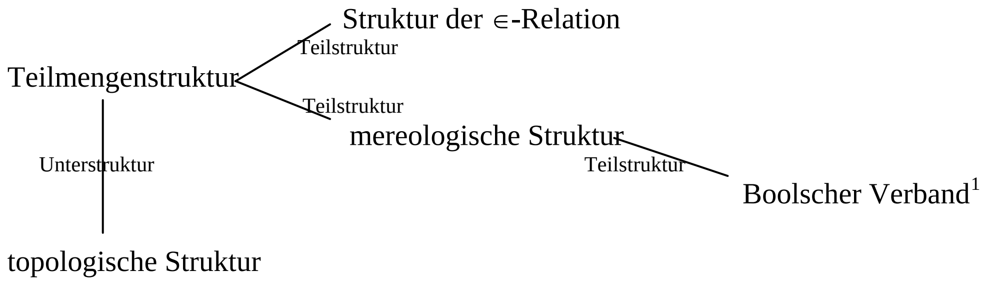
Damit ist es möglich, (im platonischen Sinne) Strukturen für sich, d.h. ohne Träger, zu betrachten und das Verhältnis von *Strukturen* zueinander zu begreifen als Verhältnis von *Attributen* zueinander. Die (attributiv) formale Axiomatik hat dann zum Ziel, jede Struktur auf möglichst einfache Muster zu reduzieren, bzw. sie aus ihnen aufzubauen. Die klassischen mathematischen Beweisverfahren leisten gerade dieses. Ihre Ergebnisse sind daher wie die jeder reinen Theorie generell und nicht singulär.

4. Mengenlehre und Topologie. Diese allgemeinen Ergebnisse haben wir auf die Mengenlehre angewandt. Dabei zeigte sich, dass die Mengenlehre – wie auch die Geometrie und die Arithmetik – inhaltlich *mehrere* Relationen betrifft. Es sind dies zuerst die 2-stellige $\in$-Relation mit ihren Rollen „Element“ und „Menge“. Eine Beziehung zwischen *Mengen* ist damit aber noch nicht erfaßbar. Diese wird ermöglicht durch die Relationen der Mereologie, als da sind die 2-stellige „Teil“-„Ganzes“-Beziehung und die beiden 3-stelligen Relationen „Durchschnitt“ „$\cap$“ und „Vereinigung“ „$\cup$“. Diese wie die gesamte Mereologie behandeln aber ausschließlich Teile und sind völlig ohne Bezug zur $\in$-Relation. Allerdings können als Spezialfall der Mereologie die Teile und Ganzen je Mengen sein. In diesem Fall bezeichnen wir die Teil-Ganzes-Relation mit „$\subseteq$“. Die darauf fußende die vier Relationen $\in,\subseteq,\cap$ und $\cup$ betreffende Theorie nennen wir „*Teilmengenlehre*“.

Nun haben wir aus dem großen Strukturangebot Strukturen ausgewählt, die auf das Relationenquadrupel $[\in,\subseteq,\cap,\cup]$ zutreffen. Sie sind auf Axiome zu reduzieren, die dann ein formales Axiomensystem bilden. Manche „Axiome“ etwa des „Axiomensystems“ von Zermolo, so z.B. das markante „Extensionsionalitätsaxiom“ (2.1) stellen keine Relationsattribute dar und sind daher keine Axiome in unsrem Sinne.

Strukturen bzw. Axiomensysteme sind *widerspruchsfrei*, wenn die darin auftretenden Relationsattribute widerspruchsfrei sind; sie sind vollständig, wenn darin jede (anwendbare) Pertinenzklasse durch mindestens ein Attribut vertreten ist. Da uns primär nur am *Status* der Mengenlehre gelegen ist, haben wir die Frage der Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit ihrer Axiomensysteme nicht ausführlich diskutiert.[1] Da aber jede Struktur unvollständig ist, die eine widerspruchsfreie echte Unterstruktur hat, ist jede *allgemeine* Teilmengenstruktur und damit ihr Axiomensystem unvollständig, denn die topologische Struktur hat sich als eine Unterstruktur der Teilmengenstruktur erwiesen. Einige charakteristische Strukturen der Mengenlehre stehen also in folgendem Verhältnis zueinander:

[1] Die *Unabhängigkeit* von Axiomensystemen haben wir hier sogar völlig übergangen, denn sie ist voraussetzungsvoller als Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit, ist sie doch – anders als jene – erst nach Einführung eines Folgerungsbegriffs überhaupt definierbar.



[1] Die Theorien der Ringe, Körper Verbände etc. sind je 2-stämmig über *zwei* 3-stellige Relationen mit einem Argumentbereich.

Verwendete Literatur:

Bolzano, Bernard,
PdU Paradoxien des Unendlichen. Leipzig 1851. Neudruck Darmstadt 1964
Bourbaki, Nicolas,
EdM Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen 1971
Cantor, Georg,
BtM Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I. Math.Ann. 46 (1895) 481-512
Ebbinghaus, Heinz-Dieter,
EdM Einführung in die Mengenlehre. Heidelberg/Berlin ^{4}2003
Felscher, Walter
NmaZ Naive Mengenlehre und abstrakte Zahlen I. Mannheim/Wien/Zürich 1978
Frege, Gottlob,
BuG Über Begriff und Gegenstand. in Vjschrift für wissensch. Philosophie 16
GdA Die Grundlagen der Arithmetik, Stuttgart 1987
GgdA Grundgesetze der Arithmetik I. Jena 1893; Nachdr. Hildesheim1966
WiF Was ist eine Funktion?, in Festschrift für Ludwig Boltzmann, 1904. Nachdruck in: G.Frege, *Funktion,Begriff,Bedeutung,* hrsg. v. G. Patzig, Göttingen 1975, S.81–90.
Gödel, Kurt,
fuS Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. In: Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), S.173 – 198.
Hermes, Hans,
EmL Einführung in die mathematische Logik. Stuttgart 1963
Hilbert, David,
GdG Grundlagen der Geometrie. Leipzig/Berlin ^{4}1913
HP Die Hilbertschen Probleme. Leipzig ^{2}1979
Hilbert, David und Bernays, Paul,
GdM Grundlagen der Mathematik. Berlin/Heidelberg/New York ^{2}1968
Hohelüchter, Martin,
EfK Ein formales Kategoriensystem. Münster 2006
FAA Formale mathematische Axiome als Attribute. Münster 2007
Kon Kontrarietät. Münster 1988
Meschkowski, Herbert,
PnM Problemgeschichte der neueren Mathematik. Manheim/Wien/Zürich 1978
Neumann, J.von
AdM Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 1928 Bd.XXVII (1928) S.669 – 752.
Peano, Giuseppe,
FLM Formale die Logica Mathematica.Rivist. di. Mat. 1 (1891) 87-102.
Quine, Willard van Orman,
MiL Mengenlehre und ihre Logik. 1963; deutsch Braunschweig 1973
Russell, Bertrand,
PoM The Principles of Mathematics. Cambridge 1903
MLbTT Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. Am.J.of Math. 30 (1908) S. 222-262
Zermelo, Ernst,
UGM Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. Math. Ann. 65, S. 261-281.