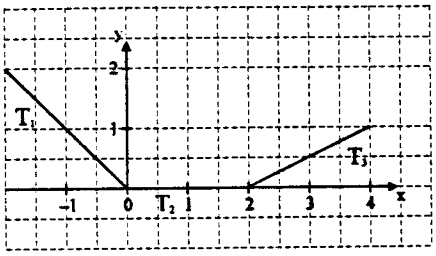
Mechthild Ebenhöh & Josef Rolfs

# Eine Abituraufgabe - Neubau einer Straße

(gewählt im Frühjahr 1996 für einen Mathematik-LK, mit TI-82 als Hilfsmittel. Veröffentlicht in **m I**, Heft 78)

Die in der Skizze dargestellte Linienführung einer Straße wird den Anforderungen des immer schneller werdenden Autoverkehrs nicht mehr gerecht. Insbesondere die "Knicke" zwischen den Teilstücken $T_1$ und $T_2$ bzw. $T_2$ und $T_3$ haben wiederholt zu Klagen und Unfällen geführt. Deswegen soll für das Teilstück $T_2$ eine neue Linienführung gefunden werden.




1. *Bestimmen Sie die Gleichung einer Polynomfunktion 5. Grades, deren Graph das rechte und linke Teilstück der Straße "glatt" miteinander verbindet. Erläutern Sie, welche mathematischen Begriffe von der umgangssprachlichen Formulierung "glatt" erfaßt werden.*

Dem Straßenbauamt liegen drei Vorschläge zum Bau des neuen Teilstücks vor, und zwar jeweils die Graphen der Funktionen $f_1$ bis $f_3$ im Intervall $[0;2]$.

$$f_1(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x$$

$$f_2(x) = \frac{3}{32}x^5 - \frac{9}{16}x^4 + x^3 - x$$

$$f_3(x) = -\frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{4\pi}\sin(\pi x)$$

2. *Bestimmen Sie zunächst von jeder dieser Funktionen numerisch das Krümmungsmaximum im angegebenen Intervall.*

   (Term der Krümmungsfunktion von $f$:: $K(x) = \dfrac{f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3}$)

   *Beurteilen Sie dann die drei möglichen Linienführungen, indem Sie alle wichtigen Werte berücksichtigen, die einen optimalen Straßenverlauf gewährleisten.*
   *Geben Sie dem Straßenbauamt eine Empfehlung, nach welcher Funktion das neue Teilstück gebaut werden soll, und berücksichtigen Sie dabei, daß es aus Kostengründen im Interesse des Amtes liegt, die Fläche zwischen altem und neuem Teilstück möglichst gering zu halten. Selbstverständlich ist Ihre Empfehlung zu begründen. Falls Sie keine Empfehlung geben können, führen Sie Ihre Gründe dafür an, und geben Sie Hinweise, ob und wie nach weiteren Lösungsmöglichkeiten gesucht werden soll.*

## Fachdidaktische Aspekte

Bahngleisübergänge und Straßenverbindungen sind ein Beispiel für Anwendungsaufgaben aus dem Analysisunterricht. Die sogenannten „Steckbriefaufgaben", die meist mathematisch motiviert sind, erfahren eine Erweiterung durch den Aspekt der Krümmung eines Funktionsgraphen.
Den Schülern ist der Begriff einer scharfen Kurve nicht unbekannt. Die auftretenden seitlichen Beschleunigungen erfordern eine Reduzierung der Geschwindigkeit und bergen Gefahrensituationen, die von jugendlichen Autofahrern oft nur schwer eingeschätzt werden können.
Der mathematische Zugang zum Krümmungsmaß konnte bislang aber nur in Ausnahmefällen unterrichtet werden, da der rechnerische Aufwand ohne Hilfsmittel leicht die Grenzen der Zumutbarkeit überschreitet.

Voraussetzung für die Bearbeitung dieser Aufgaben sind folgende Kenntnisse:

- Differenzierbarkeit und Stetigkeit
- Krümmungsmaß
- Differential- und Integralrechnung bei Polynom- u. trigonometrischen Funktionen
- Lineare Gleichungssysteme
- eventuell Bogenlänge

Da die Berechnung der Krümmung ohne Hilfsmittel zu aufwendig ist, können diese Aufgaben ohne die modernen Helfer nicht gestellt werden. Prinzipiell sind Übergangsaufgaben auch mit einem programmierbaren Grafikrechner zu lösen, denn da es sich um angewandte Aufgaben handelt, sind exakte Lösungen nicht notwendig, und überhaupt nur ganz selten zu gewinnen.

Von den Schülern werden im Wesentlichen drei Leistungen gefordert:

1. Das Aufstellen des Ansatzes
2. Das Eingeben der Fragestellung an den Rechner
3. Die Interpretation der Ergebnisse.

Die dargestellte Aufgabe ist in vieler Hinsicht variierbar, und damit für Übungs- und Klausuraufgaben geeignet. Bleibt man im Bereich der Funktionen, so ist bei der Problemstellung darauf zu achten, dass keine senkrechten Tangenten auftreten. Der so häufige rechtwinklige Übergang muss also im Koordinatensystem gedreht werden. Diese Einschränkung fällt weg, wenn man parametrisierte Kurven wählt, wie dies in der Technik auch üblich ist.
Für den Zusammenhang zwischen Krümmung und Maximalgeschwindigkeit kann man den Richtwert der Bundesbahn für nicht überhöhte Kurven benutzen:

$$v\left[\frac{km}{h}\right] = 3.6\cdot\sqrt{0.65\,R[m]}$$ wobei R der Krümmungsradius in m ist.

---

### Literatur:

[1] G.STEINBERG: Sanft krümmt sich, was ein Gleis werden will, **m l** Heft 69 (1995)
[2] A.KIRSCH: Übergangsbögen bei Eisenbahngleisen als Thema für den Mathematik-Unterricht, MNU 50 (1997)

# Allgemeine Lösungsskizze der Abituraufgabe

## (1) Berechnung der Übergangsfunktion

allgemeiner Ansatz: $f(x)=a x^5+b x^4+c x^3+d x^2+e x+f$

f muss an den Übergangsstellen stetig sein, also $f(0)=0$ und $f(2)=0$

f muss an den Übergangsstellen differenzierbar sein, also $f'(0)=-1$ und $f'(2)=\frac{1}{2}$

f muss an den Übergangsstellen Krümmung 0 haben, also $f''(0)=0$ und $f''(2)=0$

Mit diesen 6 Bedingungen erhält man ein Lineares Gleichungssystem, das mit dem Rechner gelöst wird.

Ergebnis: $\boxed{f(x)=\frac{3}{32}x^5-\frac{9}{16}x^4+x^3-x}$

## (2) Vergleich der Vorschläge

Numerisch ermittelte Krümmungsmaxima:

$f_1$: $K_{max}\approx 0.969$ *bei* $x\approx 0.597$
$f_2$: $K_{max}\approx 1.467$ *bei* $x\approx 0.737$
$f_3$: $K_{max}\approx 1.615$ *bei* $x\approx 0.743$

Übersicht über alle wichtigen Werte:

| | $f(0)$ | $f(2)$ | $f'(0)$ | $f'(2)$ | $f''(0)$ | $f''(2)$ | $K_{max}$ | Fläche | Länge |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | 0 | 0 | -1 | 0.5 | 1.5 | 0 | 0.969 | 0.5 | 2.1832 |
| $f_2$ | 0 | 0 | -1 | 0.5 | 0 | 0 | 1.467 | 0.6 | 2.2693 |
| $f_3$ | 0 | 0 | -1 | 0.5 | 0 | 0 | 1.615 | 0.608 | 2.2799 |

**Gutachten:**

Ein Straßenverlauf nach $f_1$ verbraucht die geringste Fläche, ist am kürzesten und hat die geringste Extremkrümmung. Dieser Vorschlag hat aber den Nachteil, dass an der ersten Übergangsstelle ein Krümmungssprung von 0 auf 0.53 erfolgt. Autos mit zu hoher Geschwindigkeit können ins Schleudern geraten. Bei welcher Geschwindigkeit dieser Krümmungssprung noch tolerierbar ist, kann ohne weitere Informationen nicht entschieden werden.

$f_3$ erfüllt genau wie $f_2$ alle Bedingungen für einen glatten Übergang, schneidet aber insgesamt schlechter ab, weil Krümmungsmaximum, Weglänge und Flächeninhalt etwas größer sind als bei $f_2$.

Man würde dem Straßenbauamt $f_2$ empfehlen, falls die Extremkrümmung von 1.467 für den Verkehrsfluss akzeptiert werden kann. Falls nicht, sind weitere Untersuchungen notwendig, die Auskunft darüber geben, bei welchen Geschwindigkeiten ein Verlauf nach $f_1$ oder $f_2$ günstiger ist.

## Bearbeitung mit TI-92

### Grafische Darstellung mit TI-92

Einstellung: MODE : FUNCTION RADIAN APPROXIMATE

Man gibt über das y= Menü die Terme ein:

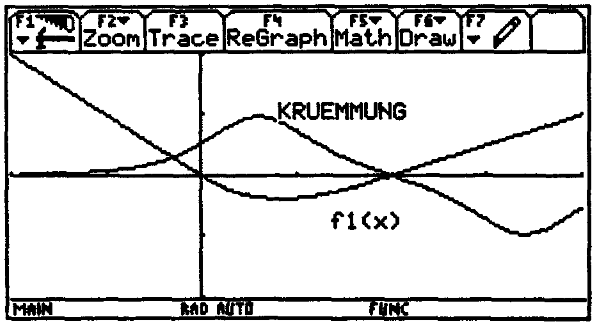
- y1 = -x | x<0
- y2 = 0.5 x -1 | x>2
- y3 = -1/8• x^3 + 3/4•x^2 - x | 0<x and x<2

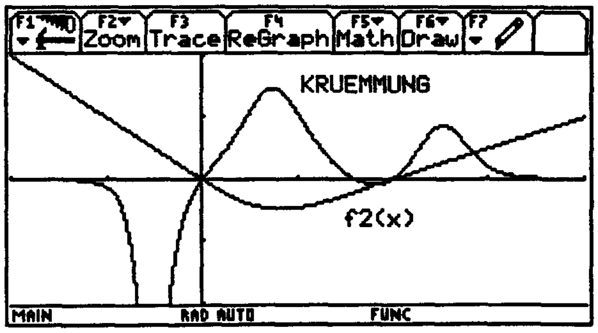
  usw.
- y9 = ***d*** ( y3(x) , x) (Ableitungsfunktion von y3)
- y10 = ***d*** ( y9(x) , x) / (1+y9(x)^2)^1.5 (Krümmungsfunktion von y3)

Der Einfachheit halber gibt man an irgendeiner Stelle im y= Menü die Terme für die Ableitungsfunktion und die Krümmungsfunktion ein - hier unter y9 und y10 - , wobei der y9-Term deaktiviert bleibt (F4), damit er die Zeichnung nicht stört. Mit y10 kann man bei Bedarf den Graphen der Krümmungsfunktion zeichnen lassen.

Dieses Vorgehen bietet sich an, weil es übersichtlicher ist, jeweils nur eine Funktion hinsichtlich der Krümmung zu untersuchen.

Werden dann die Daten von y4 gewünscht, so ist nur noch im Term von y9 das y3 durch y4 auszutauschen.



## Algebraische Berechnungen mit TI-92

Einstellung: MODE : RADIAN AUTO für die Berechnungen: APPROXIMATE

**Aufstellen und Lösen des Linearen Gleichungssystems:**

- Define pol(x) = a• x^5+b• x^4+c• x^3+d• x^2+e• x +f
- ***d*** (pol(x) , x) → dpol(x) (1. Ableitung)
- ***d*** (pol(x) , x , 2) → ddpol(x) (2. Ableitung)
- pol(0) = 0 f = 0
- 0 → f
- dpol(0) = -1 e = -1
- -1 → e
- ddpol(0) = 0 2 d = 0
- 0 → d
- pol(2) = 0 32 a+16 b+8 c - 2 = 0
- dpol(2) = 0.5 80 a+32 b +12 c - 1 = 0.5
- ddpol(2) = 0 160 a+48 b+12 c = 0
- simult ( [ 32 , 16 , 8 ; 80 , 32 , 12 ; 160 , 48 , 12 ] , [ 2 ; 1.5 ; 0 ] ) $\begin{bmatrix} .0938 \\ -.5625 \\ 1.000 \end{bmatrix}$

**Berechnung der Daten:**

Wenn man die drei Funktionsterme im y= Menü eingegeben hat, kann man auch im HOME - Editor darauf zugreifen. Allerdings muss die Einschränkung 0 < x < 2 gelöscht werden, damit der Rechner die Ableitungen an den Übergangsstellen ermitteln kann. Beispiel für die Daten von $f_1$ (eingegeben als y3) :

- y9(2) .5000
- y10(2) 0.0000

Krümmungsmaximum:

- fmax ( y10(x) , x) | 0<x and x<1 x= .5967
- y10(.5967) .9687