Modifikationsschema für Graphen

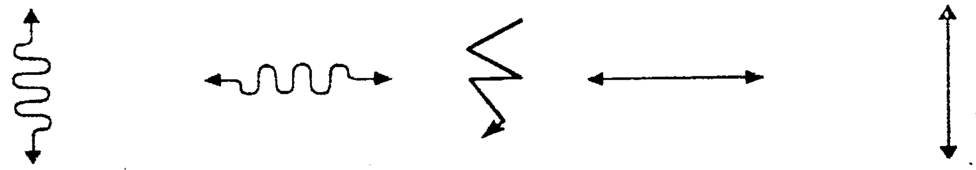
Themenbereich	
Analysis	
Inhalte	**Ziele**
• Potenz-, Exponential- und trigonometrische Funktionen • Die zugehörigen Umkehrfunktionen • Elementare Modifikationen dieser Funktionen	• Vom Funktionsterm ausgehend den Verlauf des Graphen entwickeln • Vom Graphen auf den Funktionsterm rückschließen

Adressaten:
Mit der systematischen Behandlung der oben genannten Funktionsklassen können die Modifikationen der Ausgangsgraphen stets nach demselben Schema bearbeitet werden. Damit ist das Modifikationsschema ab der Mittelstufe anwendbar.

Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen ist eine bestimmte reelle Funktion f, die durch Hinzufügen von Summanden b und d bzw. Faktoren a und c auf die Form $\boxed{c \cdot f(a \cdot (x+b)) + d}$ gebracht wurde.

Dabei treten Veränderungen des ursprünglichen Graphen f auf, die sich sehr komprimiert mit nachstehendem Schema verdeutlichen lassen.

$$\mathbf{c \cdot f\big(a \cdot (x + b)\big) + d}$$



Faktor **a**: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ y \end{pmatrix}$ Faktor **c**: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ c \cdot y \end{pmatrix}$

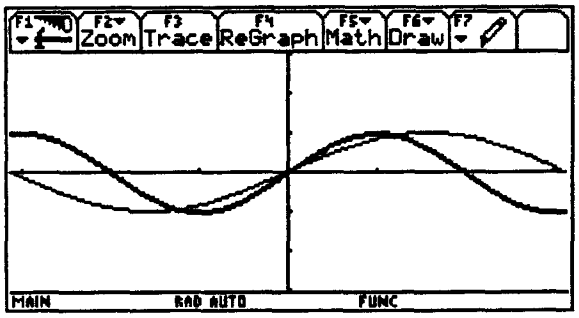
Summanden **verschieben**. Faktoren **verbiegen** (strecken, stauchen). Negative Faktoren **spiegeln**.

Wie wir unten noch im Detail sehen werden, symbolisieren die „glatten" Pfeile Verschiebungen, während die „geschlängelten" Pfeile Verbiegungen des Graphen verdeutlichen sollen. Entsprechend der Richtung der Pfeile geschieht die entsprechende Modifikation entweder parallel zur x- oder zur y-Achse. Was dies im Detail für die beiden Faktoren c und a bedeutet, wurde oben nochmals besonders erläutert, wobei wir zunächst stets von positiven Faktoren ausgehen. Ein negatives Vorzeichen vor einem dieser beiden Faktoren bedingt zusätzlich eine Spiegelung parallel zur jeweiligen Achse. Eine Spiegelung parallel zur x-Achse ist natürlich de facto eine Spiegelung an der y-Achse und umgekehrt.
Der Blitz in der Mitte des Schemas bezieht sich nur auf die Modifikationen a und b und soll andeuten, daß hier umgekehrt als erwartet argumentiert werden muß. Dies bedeutet, daß sich eine vermeintliche Streckung parallel zur x-Achse, z.B. um den Faktor a=4, tatsächlich als Stauchung um den Faktor 1/4 äußert. Analog verhält es sich mit dem Summanden b. Sein Vorzeichen muß ebenfalls umgekehrt interpretiert werden. Z.B. bedingt hier ein negatives Vorzeichen entgegen der Orientierung auf der Zahlengeraden eine Verschiebung nach rechts.
Modifikationen parallel zur x-Achse werden demnach (bis auf die Spiegelung) grundsätzlich umge kehrt als erwartet durchgeführt.
Die Wahl der Bezeichnungen a, b, c und d legt die Reihenfolge der Bearbeitung fest, falls man ausgehend von einem Funktionsterm den zugehörigen Graphen entwickeln möchte.

Schauen wir uns als Beispiel verschiedene Modifikationen einer sin-Funktion im Vergleich zur ursprünglichen Fassung an.

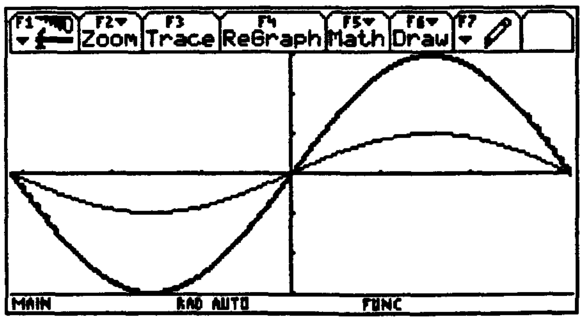
Für variierende Werte von a können wir feststellen, daß sie eine Frequenzmodulation mit der neuen Wellenlänge $\lambda=2\pi/a$ liefern.
Die Wellenlänge 4 ergibt sich mit $a=\pi/2$.

$\sin\frac{\pi}{2}x$



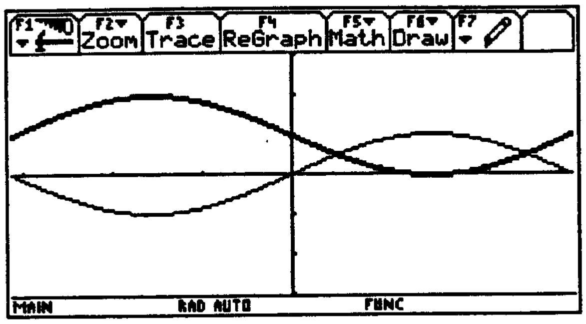
Die Amplitude kann mit dem Faktor c verändert werden.

3 sin(x)



Mit den Summanden b=(-π) und d=1 wurde der Graph nach rechts oben verschoben.

sin(x - π) + 1



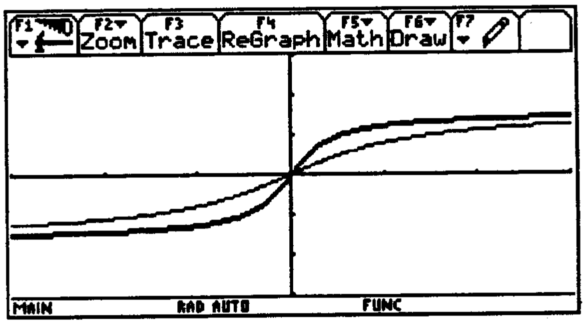
Die Leistungsfähigkeit des Modifikationsschemas wird erst dann wirklich deutlich, wenn wir schrittweise über die Stufen a, b, c und d aus einem gegebenen Graphen dessen modifizierte Fassung erarbeiten.

Als Beispiel wählen wir $f(x) = \frac{-4}{\pi}\arctan(-3(x-1)) + 1$.

Ausgangsgraph ist arctan(x). Als 1. Modifikation bestimmen wir arctan(3x).

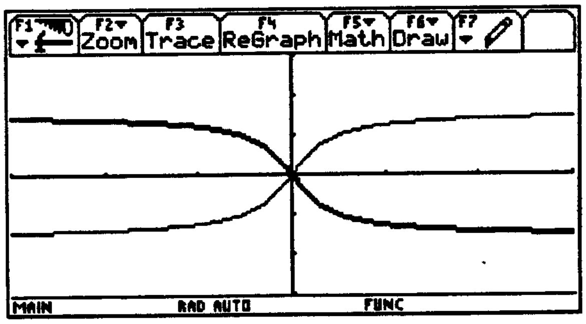
a=3 bedeutet eine Verbiegung parallel zur x-Achse, und zwar umgekehrt als erwartet eine Stauchung. Dabei werden jeweils nur die x-Komponenten der Graphenpunkte modifiziert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ y \end{pmatrix}$$



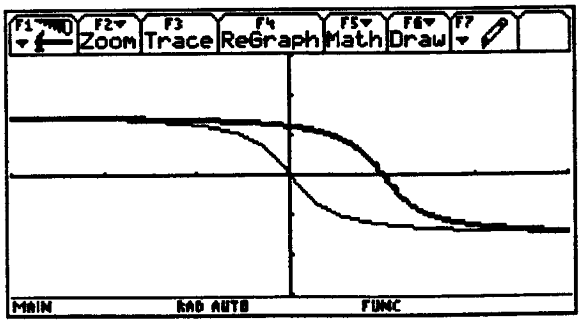
Das negative Vorzeichen von a schlägt als Spiegelung parallel zur x-Achse zu Buche.

arctan(-3x)



b=(-1) führt zu einer Verschiebung parallel zur x-Achse, und zwar umgekehrt als erwartet nach rechts.

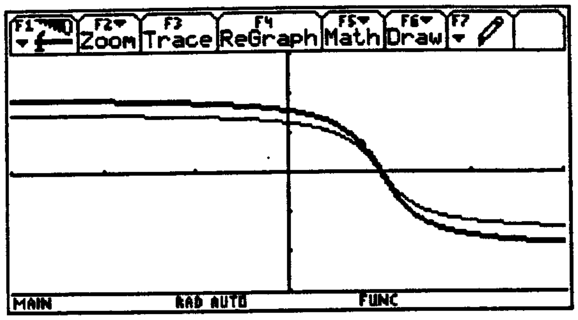
arctan(-3 (x - 1))



Der „geschlängelte“ Pfeil weist für c auf eine Verbiegung parallel zur y-Achse hin. Sämtliche Punkte des Graphen werden mit $c=4/\pi$ von

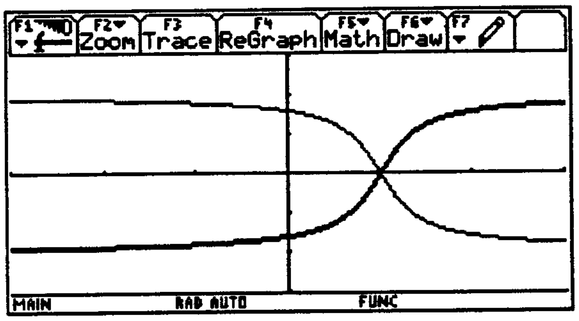
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ in die Position } \begin{pmatrix} x \\ \frac{4}{\pi}y \end{pmatrix} \text{ überführt.}$$

$$\frac{4}{\pi}\arctan(-3(x-1))$$



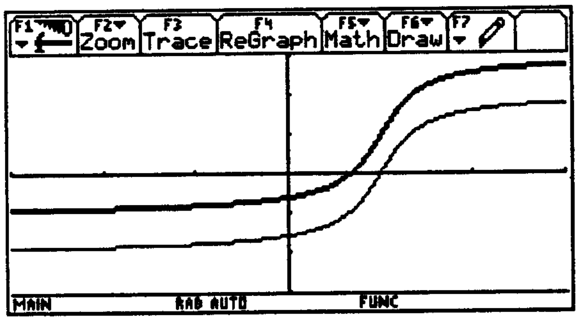
Das negative Vorzeichen von c spiegelt den Graphen parallel zur y-Achse.

$$\frac{-4}{\pi}\arctan(-3\,(x-1))$$



Zum Abschluß wird noch die Modifikation d durchgeführt, die eine Verschiebung parallel zur y-Achse liefert.

$$\frac{-4}{\pi}\arctan(-3\,(x-1))+1$$



Weiterführende Aufgabe

Die Entwicklung eines Graphen anhand seines Funktionsterms läßt sich auch umkehren. Abhängig von den vorliegenden Informationen ist dieser Weg nicht immer eindeutig.

Der rechtsstehende Graph verdeutlicht eine modifizierte sin-Funktion. Versuche den Funktionsterm in der Form

$$f(x) = c \bullet \sin(a \bullet (x+b)) + d$$

zu ermitteln! Dabei sind bis auf die Verbiegung parallel zur x-Achse sämtliche Werte ganzzahlig. Außerdem ist a nicht negativ! Versuche zunächst die Wellenlänge und die Amplitude zu bestimmen!
Die Achsen des KOS erstrecken sich jeweils von -10 bis 10.
Für jede Entscheidung sollte eine kurze Begründung formuliert werden!