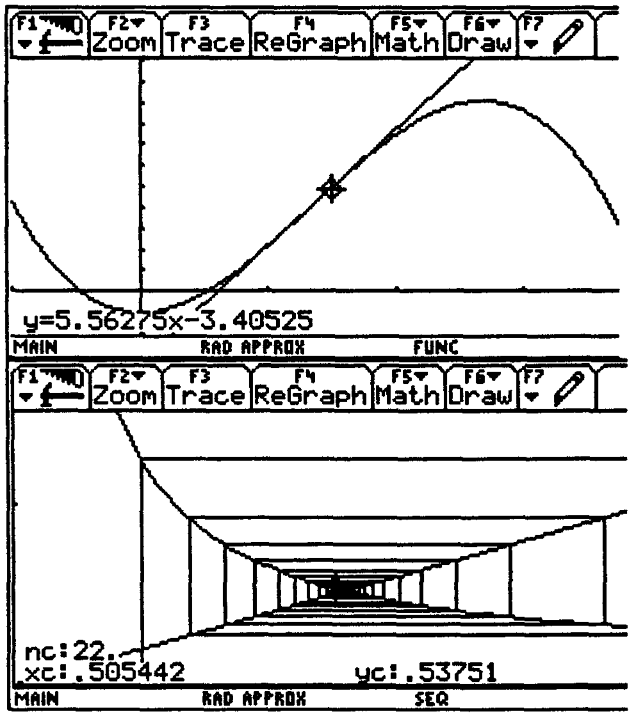
Günter Schmidt

Viele Wege führen zur Lösung!
Lösen von Gleichungen

Themenbereich	
Analysis	
Inhalte	Ziele
• Graphisches Lösen von Gleichungen • Nullstellen von Funktionen • Newtonverfahren • Iteratives Lösen von Gleichungen	• Graphische und numerische Verfahren • Anwenden von Verfahren der Analysis • Problemlösen



Eine Firma stellt kugelförmige und zylinderförmige Öltanks her, die 10000 Liter fassen. Die zylinderförmigen Tanks werden liegend verwendet. Im Innern der Tanks soll ein Kontakt angebracht werden, der bei nur noch 1000 Liter Ölmenge ein Warnsignal als Aufforderung für das Nachfüllen gibt.

In welcher Höhe muß dieser Kontakt
- bei dem kugelförmigen Tank
- bei dem liegenden zylinderförmigen Tank

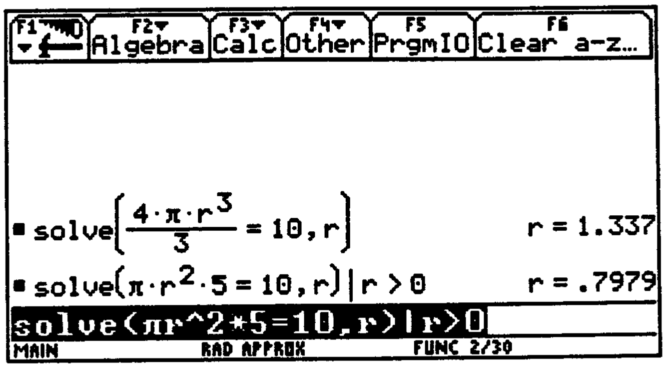
angebracht werden?

Vorüberlegungen

Zunächst bestimmen wir die Maße der Tanks.

Bei der Kugel nehmen wir einen Radius von 1.34 m an.

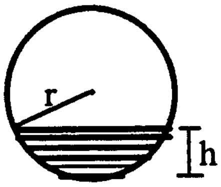
Beim Zylinder geben wir eine Länge von 5 m vor, der Radius muß dann etwa 0.8 m betragen.



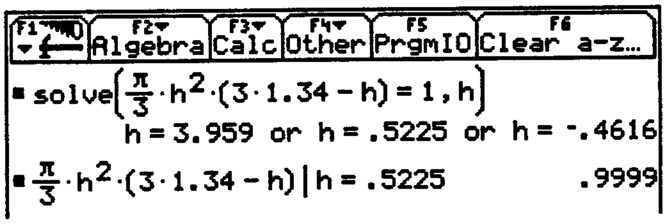
Lösungsskizze für den Kugeltank

Für das Volumen eines Kugelabschnitts der Höhe h entnehmen wir der Formelsammlung:

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$$



Um die gesuchte Höhe h für 1000 l ($= 1\ m^3$) zu erhalten, müssen wir die entsprechende Gleichung lösen.
Unser Rechner liefert uns drei Lösungen, von denen eine ($h=0.5225$ m) eine Lösung unseres Problems darstellt.

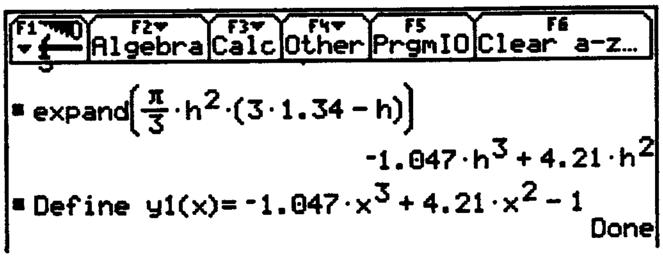


Wie kann man solche Lösungen ermitteln?
Bei der Gleichung handelt es sich um eine algebraische Gleichung 3.Grades. Hierfür ist uns kein geschlossenes Lösungsverfahren bekannt.

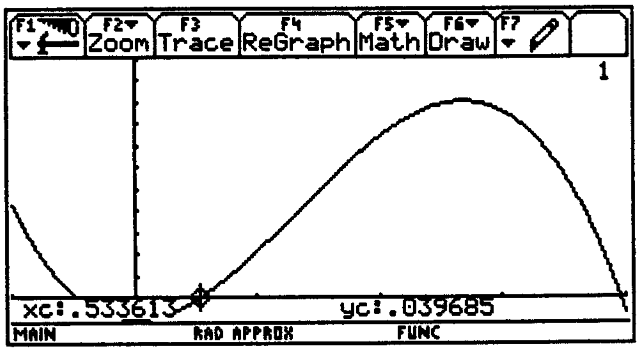
Wir entwickeln einige Lösungsverfahren mit Einsatz des TI-92.

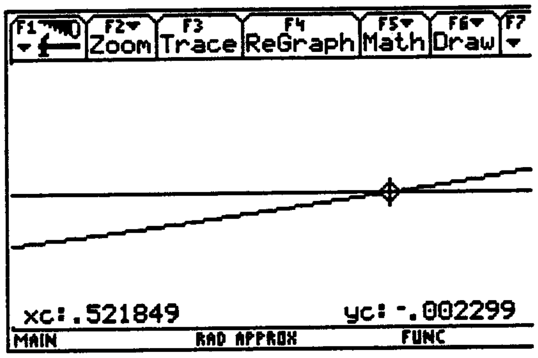
1. Grafische Ermittlung von Nullstellen

Wir stellen die Gleichung etwas um und ersetzen die Variable h durch x.
Die Lösungen dieser Gleichung können wir als Nullstellen der ganzrationalen Funktion
$y1(x) = -1.047x^3 + 4.21x^2 - 1$
auffassen.

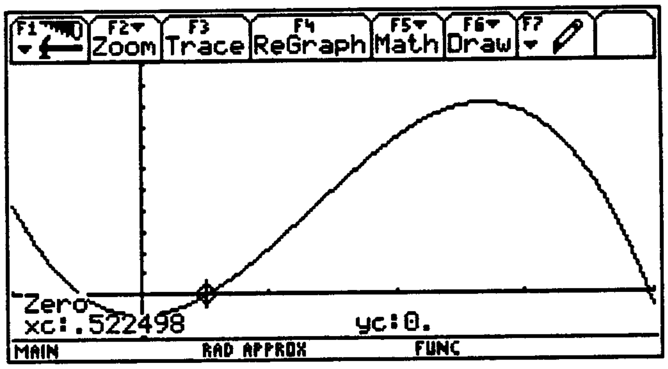


In der graphischen Darstellung können wir die Nullstelle dieser Funktion mit Hilfe der Trace Option F3 "ertasten", durch Zoom können wir die Genauigkeit steigern.





Im Grafik-Bildschirm steht uns im Math-Menu F5 die Option 2: Zero zur Verfügung. Mit dieser können wir die Nullstelle direkt ermitteln, sie wird unten im Graphik-Bildschirm angezeigt.

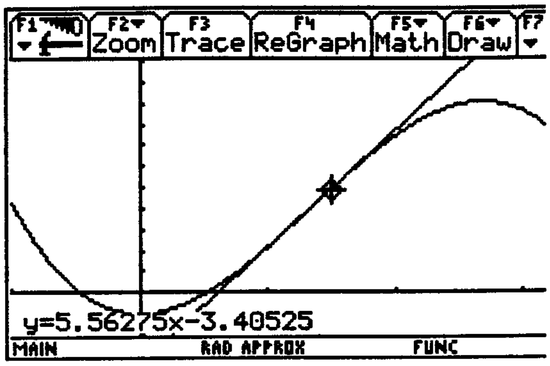


2. Newton-Verfahren

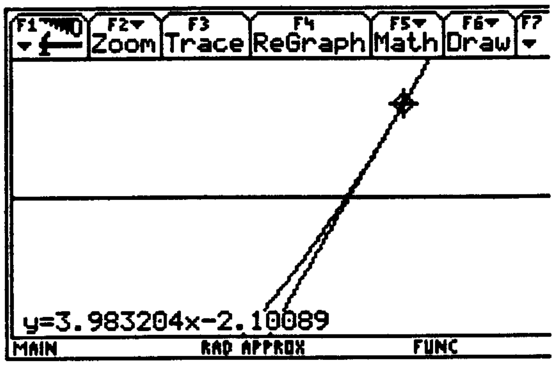
Dies ist ein Näherungsverfahren, bei dem man mit wenigen Schritten die Nullstelle einer Funktion mit großer Genauigkeit bestimmen kann. Man nutzt hier die "Linearisierungseigenschaft" einer differenzierbaren Funktion aus, d.h. daß der Graph einer solchen Funktion in jedem Punkt lokal durch ihre Tangente approximiert wird.

Wir gehen von einem graphisch gefundenen Näherungswert x_0 der wirklichen Nullstelle $\bar{x}$ aus. Um einen besseren Näherungswert zu erhalten, zeichnen wir im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ die Tangente und schneiden diese mit der x-Achse. Dieser Schnittpunkt x_1 liegt nun im allgemeinen näher an $\bar{x}$ als x_0. Um den Wert x_1 noch weiter zu verbessern, wenden wir das gleiche Verfahren bei x_1 nochmals an. Wir bilden also die Tangente an die Kurve im Punkt $P_1(x_1|f(x_1)$, schneiden diese mit der x-Achse und erhalten so den Näherungswert x_2. Durch Fortsetzung des Verfahrens erhalten wir so eine Folge von Näherungswerten $(x_0,x_1,x_2,x_3...)$, die im allgemeinen erstaunlich schnell gegen $\bar{x}$ konvergiert.

Mit dem TI92 können wir das Newton-Verfahren für unser Beispiel anschaulich durchführen.



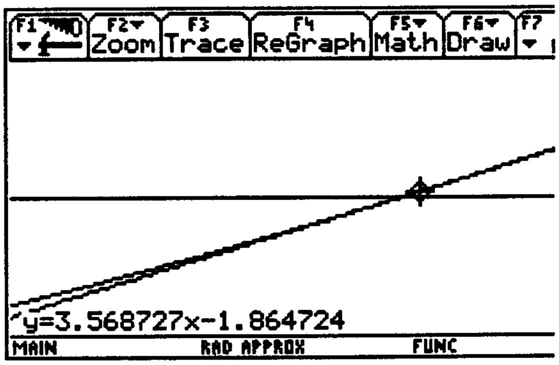
Zunächst zeichnen wir den Graph unserer Funktion y1(x). Im Grafik-Bildschirm steht uns im Math-Menu `F5` die Option `A: Tangent` zur Verfügung. Mit dieser können wir die Tangente im Startpunkt $P_0(1.5|y1(1.5))$ direkt zeichnen, die Gleichung dieser Tangente wird unten im Graphik-Bildschirm angezeigt.



Aus dieser Gleichung können wir leicht den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse $x_1 = 0.6122$ ermitteln.

Im entprechenden Bildausschnitt `Zoom` zeichnen wir wiederum die Tangente in $P_1(.6122|y1(.6122))$ und bestimmen die Schnittstelle x_2.

Beim nächsten Schritt haben wir die gesuchte Nullstelle schon hinreichend genau erreicht.



Um das Newton-Verfahren schnell auf beliebige Funktionen anwenden zu können, erstellen wir ein geeignetes Programm "**newton**". Dieses Programm soll zu der im Funktionen-Editor Y= definierten Funktion y1(x) nach der Eingabe eines geeigneten Startwertes die Nullstelle mit einer vorgegebenen Genauigkeit be-rechnen. Einen geeigneten Startwert bestimmen wir aus den Vorinformationen über die Funktion (Graph, Tabelle ...).

Zunächst leiten wir aus dem oben graphisch dargestellten Verfahren eine Iterationsvorschrift ab.

Die Gleichung der Tangente im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ lautet:

$$t: y = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

Diese Gerade (Tangente) schneidet die x-Achse in in (x1|0) mit

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

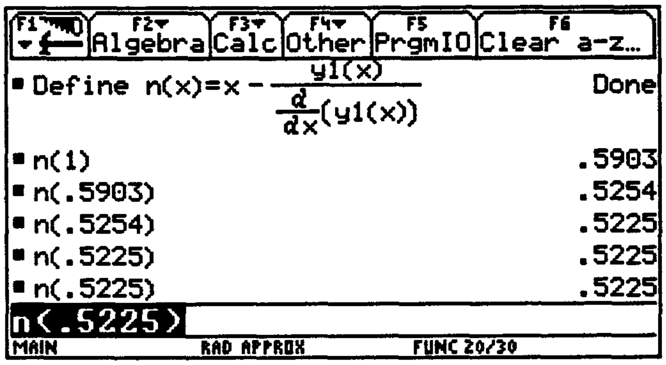
Für die Berechnung des zweiten Näherungswertes ergibt sich analog

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Als Iterationsformel erhalten wir damit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

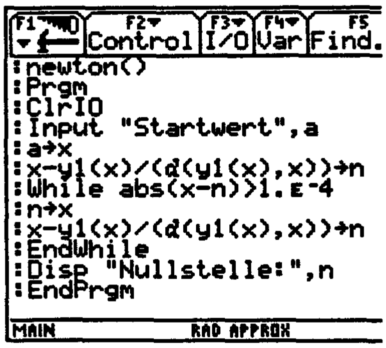
Für unsere "Tankfunktion" $y1(x) = -1.047x^3 + 4.21x^2 - 1$ demonstrieren wir zunächst die Iteration nach dem Newtonverfahren "per Hand".

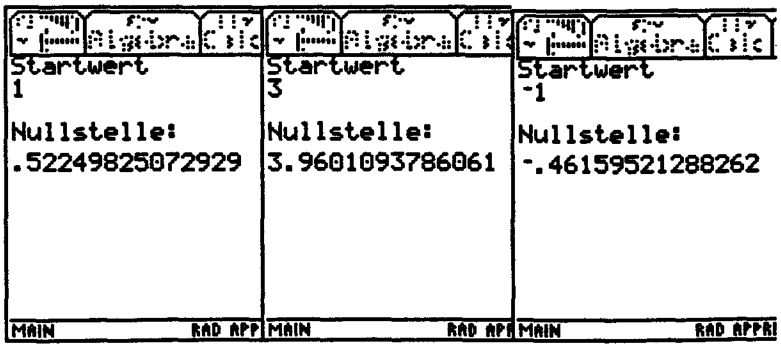


Das Programm wird erfreulich kurz, wir stellen eine mögliche Form mit drei Programmdurchläufen dar. Die Startwerte wählen wir jeweils so, daß wir zu den drei Nullstellen des Polynoms gelangen. Die Genauigkeit wird in dem Programm durch die in der While-Schleife gegebene Abfrage mit 10^{-4} vorgegeben.

Das Programm

Programmläufe mit verschiedenen Startwerten

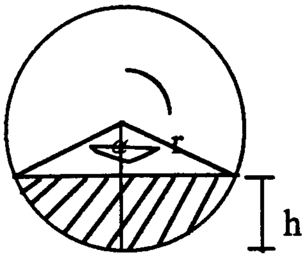




Lösungsskizze für den Zylindertank

Das Volumen eines Zylinderabschnitts wird durch die Querschnittsfläche A des Kreisabschnitts bestimmt. Mit dem Öffnungswinkel α (im Bogenmaß) ergibt sich für diese Fläche

$$A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha)$$



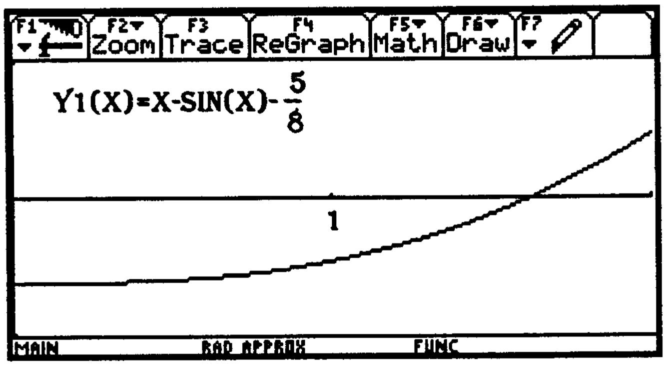
Für das zugehörige Volumen in unserem Zylinder (Länge 5m, Radius 0.8m) ergibt sich damit

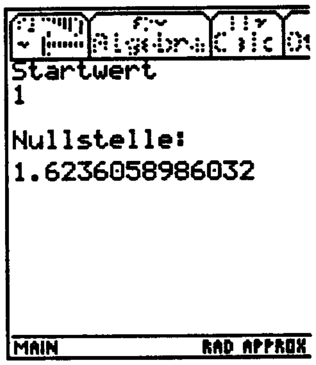
$$V = \frac{r^2 \cdot 5}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha)$$

Setzen wir für V = 1000 dm^3, r=8 dm und l=50 dm ein, so ergibt sich nach elementarer Vereinfachung eine Gleichung für α

$$\alpha - \mathrm{SIN}\alpha - \frac{5}{8} = 0$$

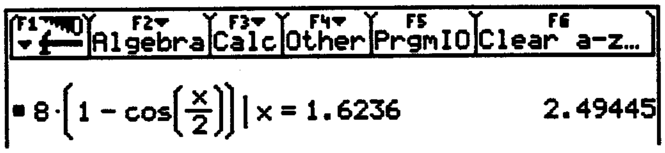
Wir lösen diese Gleichung nun sofort mit dem Newtonverfahren. Dazu definieren wir im Y= Editor die entsprechende Funktion y1(x). Aus der graphischen Darstellung erhalten wir 1 als einen geeigneten Startwert. Dann starten wir das Programm **newton()**.





Das aus dieser Gleichung gewonnene α liefert uns dann die gesuchte Höhe h

$$h = r \cdot (1 - \cos\frac{\alpha}{2})$$



Beim Zylindertank müssen wir den Kontakt also in einer Höhe von etwa 2.5 dm anbringen.

3. Iterative Ermittlung von Nullstellen nach der "Fixpunktmethode"

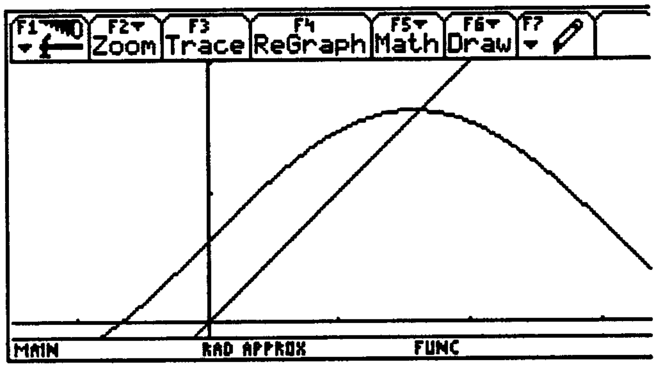
Zum Abschluß wollen wir an dem gegebenen Problem noch eine weitere Methode zur Lösung von Gleichungen kennenlernen, die sogenannte **Fixpunktmethode**. Hierbei wird das Lösen einer Gleichung wiederum als Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion aufgefaßt. Allerdings wird das Suchen (Finden) einer Nullstelle einer Funktion f auf das Suchen (Finden) eines "Fixpunktes" einer anderen Funktion g zurückgeführt.

Hierzu zunächst einige Begriffsklärungen.

- Wir nennen $\bar{x}$ Fixpunkt einer Funktion g, wenn $g(\bar{x}) = \bar{x}$.
- Die Funktion g heißt Iterationsfunktion der Funktion f auf dem Intervall [a,b] , wenn für alle x aus [a,b] gilt: $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$

Geometrisch bedeutet das Suchen des Fixpunktes von g gerade das Suchen des Schnittpunktes des Graphen von g mit der 1.Winkelhalbierenden.

Für unsere Gleichung $\alpha - \sin\alpha - \frac{5}{8} = 0$
erhalten wir als Funktion
f: f(x) = x - sinx - 5/8
und als entsprechende Iterationsfunktion
g: g(x) = sinx + 5/8, denn
$x - \sin x - \frac{5}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \sin x + \frac{5}{8}$

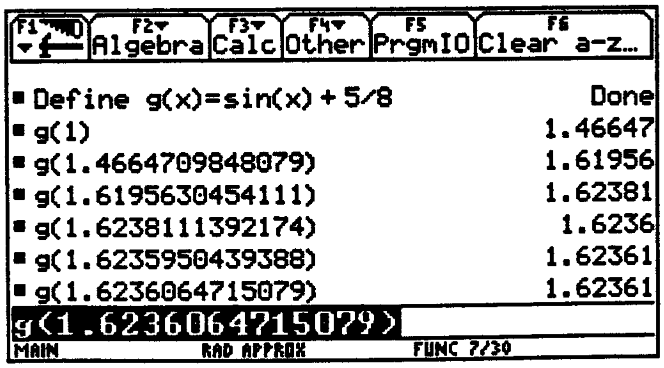


Dieses Suchen des Fixpunktes geschieht nun iterativ, d.h. man beginnt mit einem Startwert x_0 und bildet nun nacheinander

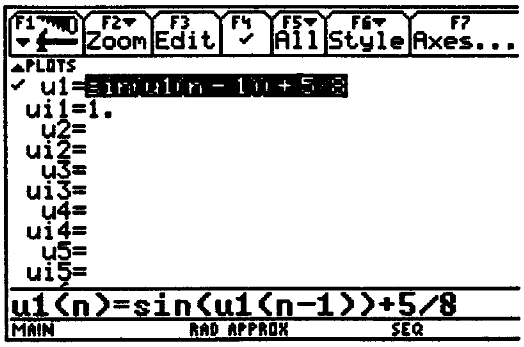
$$g(x_0) = x_1,\ g(x_2) = x_2, \ldots,\ g(x_n) = x_{n+1}, \ldots$$

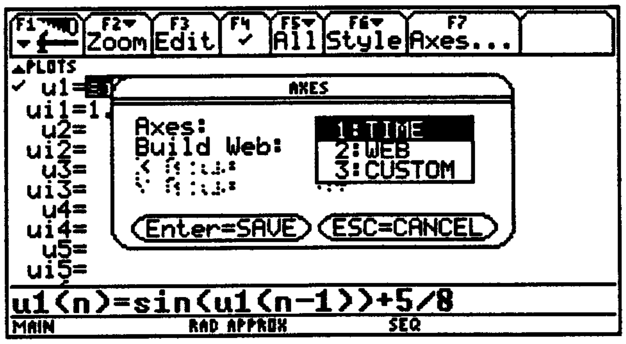
Die Funktion g wird also immer wieder auf das Ergebnis des vorhergehenden Schrittes angewendet. Unter bestimmten (häufig gegebenen) Voraussetzungen konvergiert die Folge (x_n) gegen den Fixpunkt $\bar{x}$.

Wir führen das Iterationsverfahren für unser Beispiel zunächst einmal mit unserem Rechner schrittweise durch. Wir definieren die Iterationsfunktion $g(x) = \sin x + \frac{5}{8}$ und beginnen die Iteration mit dem Startwert x_0=1. Nach 5 Iterationsschritten haben wir den Fixpunkt auf 5 Nachkommastellen genau erreicht.



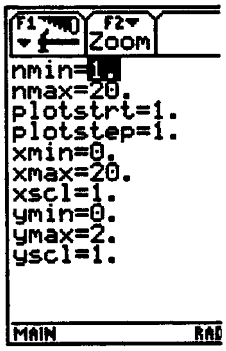
Der TI92 erlaubt auch eine geschlossene Durchführung des Verfahrens einschließlich verschiedener graphischer Veranschaulichungen.
Unter `MODE` stellen wir bei Graph die Option `4:SEQUENCE` ein. Im Y= Editor können wir nun die Iterationsgleichung als rekursiv definierte Folge u1(n) eingeben, ebenso den Startwert ui1=1. Unter `F7 Axes...` wählen wir die Option `1: TIME`.



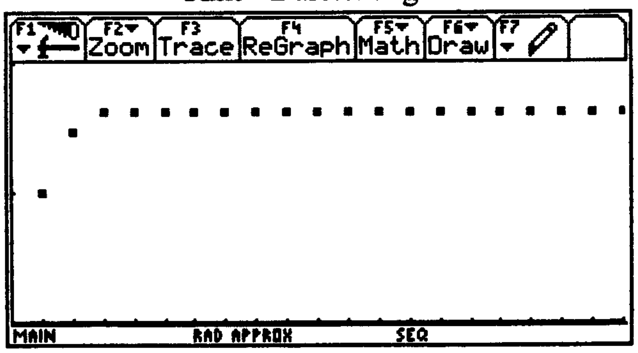


Nach passender Wahl in `WINDOW` erhalten wir mit `GRAPH` ein Bild der ersten 20 Folgenglieder. In dieser graphischen Darstellung werden auf der x-Achse die Nummern n der Folgeglieder, auf der y-Achse die Werte der zugehörigen Folgeglieder x_n aufgetragen, man erhält somit die Punkte $(n|x_n)$. Die Bezeichnung "Time" für diese Darstellung kommt daher, daß oft Zeitfolgen betrachtet werden, die Nummern n also verschiedene Zeitpunkte bedeuten. Die Anwendung von Trace (F3) oder das Aufrufen der zugehörigen Tabelle durch `TABLE` verdeutlicht die schnelle Konvergenz der Folgenglieder zum "Fixpunkt" 1.6236.

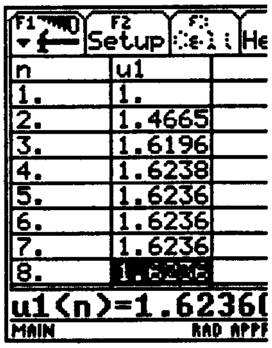
Window



"Time"-Darstellung

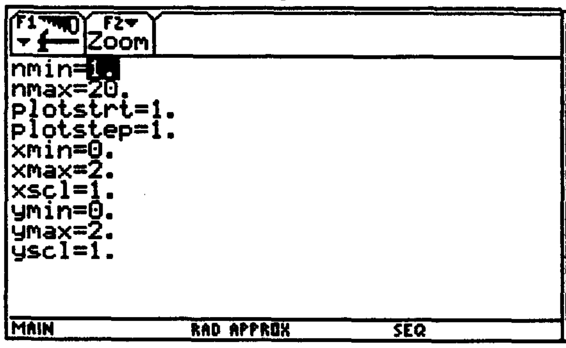


Tabelle

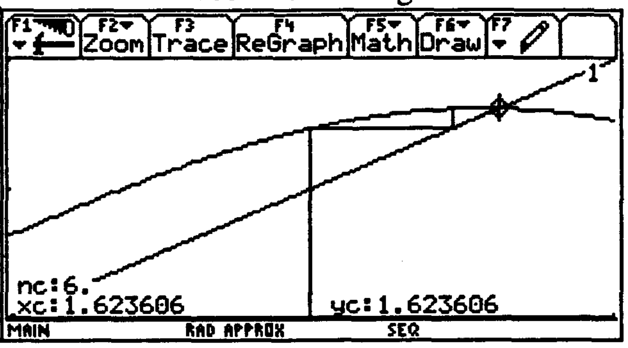


Eine weitere "dynamische" Veranschaulichung der Konvergenz bietet der TI-92, wenn wir im Y= Editor uner `F7 Axes` die Option `WEB` einstellen. In diesem Fall erhalten wir ein Bild der sogenannten **"graphischen Iteration"**. Hierbei wird die Iteration mit Hilfe der 1.Winkelhalbieren dargestellt. Man erhält zunächst den Graph der Iterationsfunktion und die 1.Winkelhalbierende. Nach Einstellen von Trace erzeugt das wiederholte Betätigen der Cursortaste -> nun einen Streckenzug: Vom Startwert x0 wird zunächst eine Senkrechte zur Iterationskurve gezogen und dann eine waagrechte Linie von dort zur Winkelhalbierenden. Von hier geht es wieder mit einer Senkrechten zur Kurve, von dort wieder mit einer Waagrechten zur Winkelhalbierenden usw. Auf diese Weise entsteht ein Iterationspfad-Pfad, der von den Punkten (xn|xn+1) über (xn+1|xn+1) zu (xn+1|xn+2) führt. Gegenüber der Time-Darstellung muß nun das Fenster anders bestimmt werden, indem auf x- und y-Achse jeweils der gleiche , zur Iterationsfolge passende Maßstab gewählt wird.

Window



"Web"-Darstellung



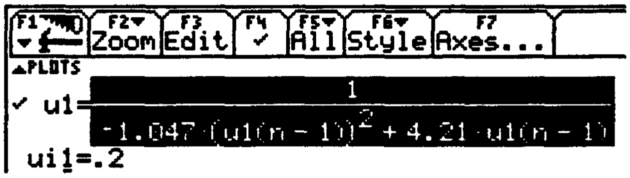
Bei unserer Iterationsfunktion ergibt sich nun als Iterationspfad das Bild einer "Einwärtstreppe", die schnell auf den "Fixpunkt" (1.62306|1.62306) zuläuft.

Zum Abschluß wenden wir die Fixpunktmethode auch auf das 1.Problem des Kugeltanks an. Durch Umstellen der Gleichung

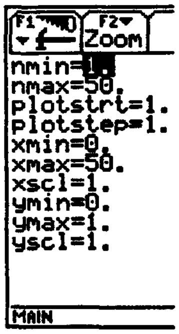
$$-1.047x^3 + 4.21x^2 - 1 = 0 \;<\!\!-\!\!>\; x(-1.047x^3 + 4.21x^2) = 1 \;<\!\!-\!\!>\; x = \frac{1}{-1.047x^2 + 4.21x}$$

erhalten wir die Iterationsfunktion $g(x) = \dfrac{1}{-1.047x^2 + 4.21x}$.

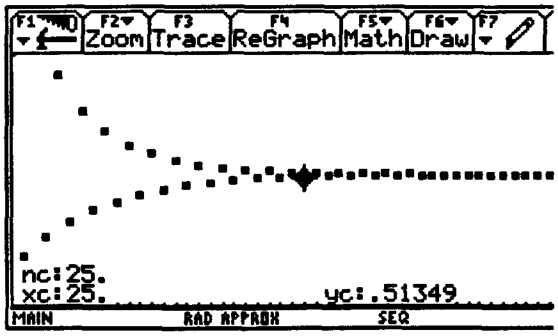
Mit dieser Funktion erzeugen wir die "Time- " und die "Web-" Darstellung der Iterationsfolge.



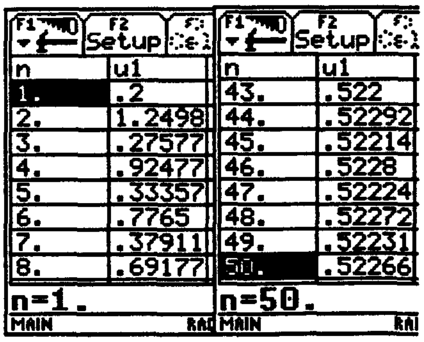
Window



"Time-"Darstellung



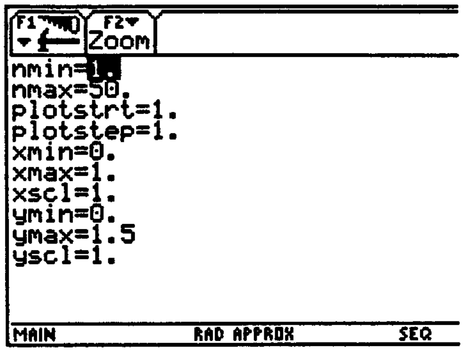
Tabelle



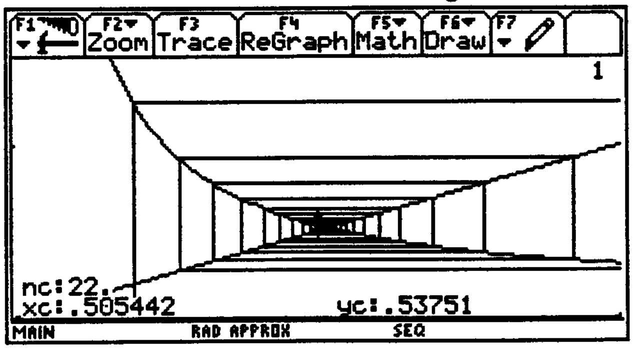
In diesem Fall konvergiert die Folge offenbar "trichterförmig" mit alternierenden Werten gegen den Fixpunkt, und dies deutlich langsamer als im 1.Beispiel.

Diese Konvergenz wird besonders eindrucksvoll in der "web"-Darstellung veranschaulicht. Hier wird auch die Bezeichnung "web" als "Netz-" oder "Spinnwebenverfahren" einsichtig. Der Iterationspfad erzeugt ein Netz, das immer enger auf den Fixpunkt (0.5225|0,5225) zuläuft.

Window



"web"-Darstellung



Zusatzaufgaben und Erweiterungen

- Erstellen eines "Peilstabes", der für 1000 l, 2000 l, . . . , 9000 l jeweils eine Markierung aufweist. (für Kugeltank und Zylindertank)
- Gleiche Aufgabe für andere Tankformen, z.B. Kegelstumpf.
- Entwicklung anderer Nullstellenverfahren, z.B. Sekantenverfahren oder Intervallhalbierung.
- Untersuchung des Newtonverfahrens. Konvergiert es immer? Welche Voraussetzungen müssen Funktion und Startwert erfüllen?
- Untersuchung des Iterationsverfahrens. Unter welchen Voraussetzungen konvergiert die Iterationsfolge gegen einen Fixpunkt?

Literatur

[1] Ade/Schell, Themenhefte Mathematik - Numerische Mathematik, Stuttgart 1975

[2] A.Engel, Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt, Stuttgart 1977

[3] A.Engel, Mathematisches Experimentieren mit dem PC, Stuttgart 1991

[4] R.Baumann, Vom Rechnen zum mathematischen Begriff, in: mathematik lehren 1/1983, Seelze 1983

[5] H.C.Reichel (Hrsg.), Mathematik für Schule und Praxis Bd 2 - Fachbereichsarbeiten und Projekte, Seite 174-201, Wien 1991

Kurzkommentar zur Literatur

[1] steht stellvertretend für viele Lehrbücher zur Numerischen Mathematik. Hier werden die im Beispiel eingesetzten Verfahren ausführlich hergeleitet. Man erhält auch Anregungen für schulgeeignete theoretische Betrachtungen und Beweise, ebenso zu Fehlerabschätzungen.

[2] ist eine schöne Einführung in algorithmisches Denken, zu den meisten Verfahren werden elegante Flußdiagramme angegeben, die sich zum Teil mit einem Taschenrechner realisieren lassen. In [3] werden viele weitere schöne Algorithmen entwickelt, die Umsetzung erfolgt hier mit PASCAL-Programmen.

In [4] und [5] werden unterrichtliche Vorschläge gemacht, bei denen auch die im obigen Beispiel behandelten Probleme in unterschiedlicher Form angesprochen werden.

Das zum Abschluß angesprochene Iterationsverfahren, insbesondere die graphische Iteration ("web") wird in den jüngst erschienenen Abhandlungen und Büchern zum Tema "Chaostheorie in der Schule" ausführlich dargestellt und angewendet, ebenso in den zum Teil fachübergreifenden Darstellungen zu "Dynamischen Systemen".