

Pfingsttagung 2002

Workshop 113

Michael Meyer, Bertram Burgner

**Multimediale Lernumgebungen:
eine fachdidaktische Analyse von
Unterrichtsbeispielen**

erstmalig veröffentlicht in:

Bärbel Barzel, Detlef Berntzen, Victor Manuel David Sendas: Neues Lernen. Neue Medien.
Viele Projekte im Land. Tagungsdokumentation. Westfälische Wilhelms-Universität
Münster. 21.-24. Mai 2002. Münster 2003 (=ZKL-Texte Nr. 25), ISBN 3-934064-30-2

Multimediale Lernumgebungen für einen abwechslungsreichen Mathematikunterricht: eine fachdidaktische Analyse von Unterrichtsbeispielen demonstriert am *ActivBoard*

Michael Meyer (Mainz) / Bertram Burgner (Wesel) ✧
Pfingsttagung Münster 2002
Workshop 113

„*Abwechslungsreicher Mathematikunterricht*“ oder „*multimediale Lernumgebungen*“ bleiben wohlklingende Worthülsen, wenn sie nicht unter ein Leitkonzept als tragender „*didaktischer Philosophie unseres Mathematikunterrichts*“ gestellt werden, aus dem heraus sie immer wieder gefüllt werden müssen.

Unser Leitkonzept:

Wir versuchen durch das Angebot geeigneter Lernumgebungen bei den Schülern das Bedürfnis nach vielfältigen mathematischen Erfahrungen im Sinne eines ganzheitlichen Lernens zu wecken.

Dies kann unter anderem durch den Einsatz der neuen Medien unterstützt werden. Daher sprechen wir von „*Multimedialen Lernumgebungen*“.

Wir fächern unser **Leitkonzept** auf:

Die Schüler sollen ...

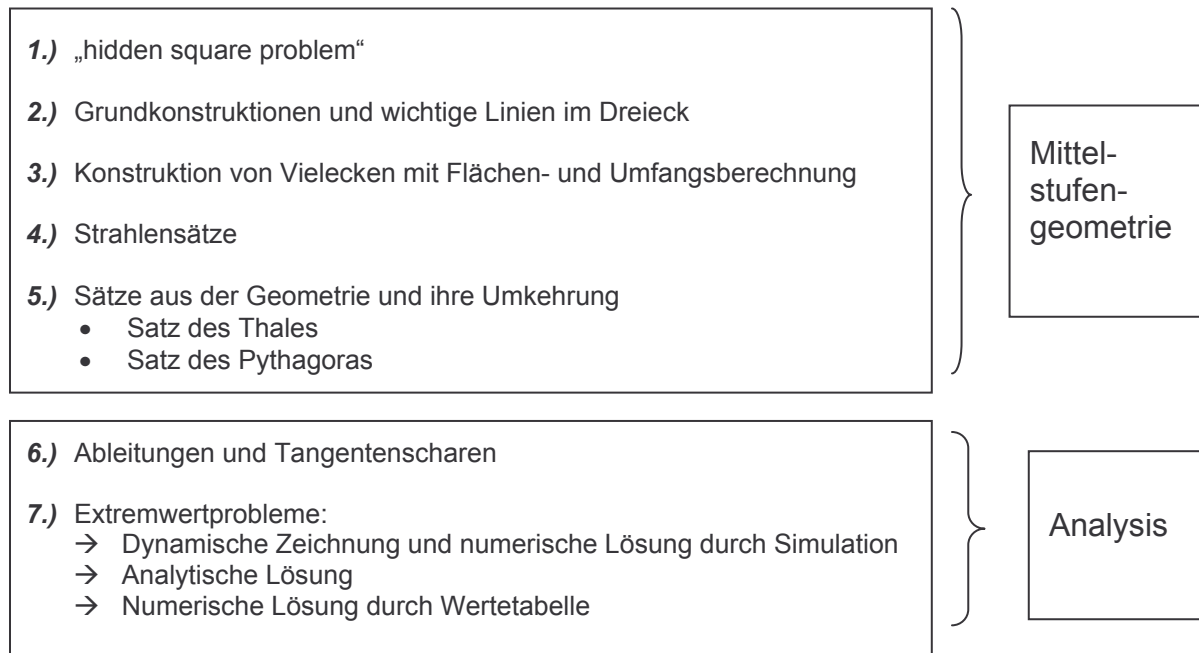
- ... in problemorientierten Lernsituationen die Möglichkeit erhalten, unterschiedliche Kompetenzen zu aktivieren und zur Anwendung zu bringen, dabei ihre eigenen Vorlieben, Stärken und Abneigungen entdecken, und lernen, sich auch mit Unliebsamem akzeptierend auseinanderzusetzen.
- ... eine Lernhaltung entwickeln, die nach vielfältiger Durchdringung verlangt und Einseitigkeit als Mangel empfindet.
- ... sowohl Freude beim kompetenten Nutzen medialer Werkzeuge empfinden wie ebenso immer wieder die Herausforderung suchen, durch weitestgehenden Verzicht auf handhabbare Werkzeuge eine Problemlösung aus gänzlich eigener Kraft anzustreben.
- ... im vergleichenden Rückblick auf eine Lösungsmethodenvielfalt unterschiedlicher Wege Befriedigung an der Konsistenz ihrer Ergebnisse verspüren.

Es werden Beispiele aus dem eigenen Unterricht zu klassischen Themengebieten der Lehrpläne vorgestellt und didaktisch-methodisch diskutiert. Auf Basis dessen werden Anregungen zur selbsttätigen Auseinandersetzung gegeben.

Zur Präsentation während des Workshops nutzen wir ein *ActivBoard*, für dessen Bereitstellung wir der Firma TDS Promethean Deutschland GmbH danken.

✧ meyer@willigis-mainz.de
burgner@t-online.de

Rundgang durch die Unterrichtsbeispiele



Beim „**hidden square problem**“ soll das mathematische Problem, ein Quadrat in ein vorgegebenes rechtwinkliges Dreieck (an den Katheten) einzupassen, von den Schülern auf fünf verschiedenen Wegen gelöst werden: zunächst praktisch durch Probieren und Messen mit einem Zollstock an ihren mit Klebestreifen diagonal geteilten Arbeitstischen, durch Verwendung bekannter mathematischer Konzepte wie der Strahlensätze, Flächenbetrachtungen mit rechtwinkligen Dreiecken oder linearen Funktionen, die jeweils zur allgemeinen Lösung führen, sowie durch eine Simulation mit *dynamischer Geometriesoftware* (hier *EUKLID DynaGeo*) unter Verwendung von *Mess- und Termberechnungsfunktionen* zur Bestätigung der vorher gefundenen Lösungsformel. Dabei können die Schüler in der Realisierung der Lösungswege die Vielfalt schon erworbener Kompetenzen erfahren oder diese wieder auffrischen und in einer rückblickenden und vergleichenden Reflektion persönlich-bewertend Stellung nehmen. Zudem ist die untersuchte Figur für einen späteren Rückgriff im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras nützlich.

Ergänzend zur herkömmlichen Einführung und der für die Schüler motivierenden Erarbeitung mit *dynamischer Geometriesoftware* (hier: *EUKLID DynaGeo*) können die **Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal** einschließlich der wichtigen **Linien im Dreieck** durch eine stärker handlungsorientierte Angehensweise über Gärtnerkonstruktionen im Gelände (z.B. auf dem Schulhof) durchgeführt werden. Durch arbeitsteilige Gruppenarbeit, Lernzirkel o.ä. bestehen hier vielfältige methodische Varianten eine hohe Schüleraktivität zu erzielen. Die Konstruktionen mit dem Gärtnerzirkel eignen sich für Einstieg und Erarbeitung ebenso wie für eine Vertiefung. Ein von uns konzipiertes Puzzle zum Fachwissen rundet die Unterrichtsreihe im Sinne einer Lernzielkontrolle ab.

Didaktisch sind hier sowohl die bei Nutzung von *EUKLID DynaGeo* mögliche Einschränkung der Menükonfiguration auf „Nur Zirkel und Lineal“, als auch -bei weiterhin geforderter Konstruktionsstrenge- die Zulassung der *Messfunktion* für Strecken und Winkel sinnvoll, da z.B. Orthogonalität oder Winkelhalbierung bei dynamischer Veränderung der Zeichnung von den Schülern selbst auf ihre Stabilität kontrolliert werden können. So werden evtl. typische Konstruktionsfehler schneller erkannt.

Aus der Problematik der Messungenauigkeit, hier am Beispiel der Thematik **Konstruktion von Vielecken mit Flächen- und Umfangsberechnung** ergeben sich Anknüpfungspunkte für statistische Auswertungen der unterschiedlichen Schülerergebnisse (z.B. Mittelwert und Standardabweichung). Anschließend kann die *dynamische Geometriesoftware* (hier: *EUKLID DynaGeo*) durch Einsetzen ihrer *Mess- und Termberechnungsfunktion* als nützliches Werkzeug dienen, die gewünschte Genauigkeit zu liefern. Überwiegend sollten Realobjekte -insbesondere aus dem Umfeld der Schule- untersucht werden.

Auch die Anwendung der **Strahlensätze** bietet sich für handlungsorientierte Unterrichtsarbeit an. Wir stellen ein Projekt vor, in dessen Verlauf die Schüler in Gruppen arbeitsteilig zu klassischen Längenmess- und Schätzverfahren (Försterdreieck, Schattenstab, Jakobsstab, Daumensprung, Messkeil und Flussbreitenbestimmung) den mathematischen Hintergrund erarbeiten, die zugehörigen Gerätschaften bauen, Messungen im schulnahen Gelände durchführen und schließlich als Experten ihre Mitschüler unterrichten. Auch eine Projektdokumentation und -präsentation (z.B. Wandzeitung, Ausstellung, Webseiten ...) sollte abschließender Bestandteil sein.

Bei solch einer anwendungsorientierten Schwerpunktsetzung in der Vertiefung kann durchaus die Erarbeitung der Strahlensätze rein innermathematisch motiviert werden. Dies kann durch die Untersuchung von Streckenverhältnissen in veränderbaren Strahlensatzfiguren erfolgen, die zunächst mit Hilfe einer *dynamischen Geometriesoftware* konstruiert werden. Mittels der *Mess- und Termberechnungsfunktion* (z.B. bei *EUKLID DynaGeo*) können die Schüler so verschiedene Streckenverhältnisse miteinander vergleichen und schließlich die Strahlensätze entdecken. Dabei sollte die Suche nach Konstanten bzw. Invarianten als leitendes Prinzip für das Auffinden von Gesetzmäßigkeiten verankert werden.

Zur Veranschaulichung, Entdeckung sowie einer integrierten Behandlung der klassischen **Sätze aus der Geometrie** ist *dynamische Geometriesoftware* ebenso hervorragend geeignet. Sowohl Satz und Umkehrung (z.B. beim Thalesatz) als auch größere Satzgruppen (z.B. Satz des Pythagoras mit Umkehrung und Einbeziehung von Höhen- und Kathetensatz) lassen sich beispielsweise mit nur einer dynamischen Zeichnung modellieren und durch Einfügen von *Formeltermberechnungen* untersuchen. Das Ausarbeiten solcher komplexeren Gebilde kann nach unserer Erfahrung für die Schüler herausfordernd und reizvoll sein, stellt aber auch höhere Anforderungen an die Lerngruppe.

An zwei Unterrichtsbeispielen weisen wir die didaktisch sinnvolle Einbindung der Erstbenutzung eines *Computeralgebrasystems* wie *DERIVE* im Rahmen von Standardthemen des Analysisunterrichts auf.

In einer dieser einfach gestalteten Unterrichtseinheiten werden ohne Motivationsprobleme sämtliche allgemeine **Ableitungsregeln** „auf einen Schlag“ in relativ kurzer Zeit weitgehend eigenständig von den Schülern an Hand eines mit *DERIVE* zu differenzierenden Funktionenkatalogs herausgearbeitet. Der Arbeitsauftrag für die Schüler besteht darin, für einen Katalog von ausgewählten Funktionen die Ableitungsfunktionen zu bestimmen, um dann Ableitungsregeln für „zusammengesetzte“ Funktionen (z.B. durch algebraische Verknüpfung) analog der Grenzwertsätze zu abstrahieren und zu formulieren. Danach steht ein ganzer „Regelblock“ für die anwendende Einübung an durchmischtem, komplexerem Funktionenmaterial sowie wechselseitig aufeinander bezogenen Begründungen zur Verfügung.

Um die Struktur der Ableitungsregeln für die Schüler entdeckbar werden zu lassen, bedarf es dabei einer hierarchischen Staffelung des Funktionskatalogs. Durch Beispiele vom Typ $x^2 \cdot \sin(x)$ tritt dann z.B. die Produktregel erkennbar hervor. Ziel sollte es unserer Meinung nach auch sein, eine möglichst große Vielfalt an Regeln entdecken zu lassen (z.B. auch Differenzenregel, Reziprokenregel), damit in einer anschließenden gemeinsamen Auswertung beim Zusammengetragen, Vergleichen und Ordnen die formulierten Regeln in ihrer Beziehungshaltigkeit analysiert werden (z. B. Reziprokenregel als Sonderfall von Quotienten- oder Kettenregel oder die Herleitung der Quotientenregel aus Produkt- und Reziprokenregel etc.) .

Als weitere Einstiegsmöglichkeit können mit der *Graphik-Komponente* von *DERIVE* eindrucksvoll die **Tangentenscharen** für verschiedene Funktionsgraphen zur Veranschaulichung der lokalen Approximationsgüte von Tangenten geplottet werden. Dabei ist natürlich von den Schülern zunächst das Aufstellen des Tangententerms in Abhängigkeit vom Scharparameter als mathematische Vorarbeit zu leisten.

Ein modernes *Computeralgebrasystem* kann auf diese Weise als begleitendes, in den Prozeß mathematischer Überlegungen eingebundenes Werkzeug sinnvoll den Mathematikunterricht bereichern, ohne dass die Erarbeitung der Mathematik den Schülern dabei abgenommen wird. Zu bedenken ist allerdings auch, dass das Erarbeiten von Mathematik verflochten mit der Benutzung eines zusätzlichen neuen Werkzeugs die Lernsituation für leistungsschwächere Schüler wohl ansprechender, aber - da komplexer geworden - nicht unbedingt leichter macht.

Als mögliche methodische Variante stellen wir Quartette von Karteikarten vor, auf denen Graphen von Funktionen und ihren ersten drei Ableitungsfunktionen abgebildet sind. Diese „**Ableitungen zum Anfassen**“ müssen einander richtig zugeordnet werden und können in verschiedenen Unterrichtsphasen vielfältig zum Einsatz kommen, z.B. in einer Erarbeitungsphase bei der qualitativen Beschreibung von Funktions- und Ableitungsgraphen oder in einer Ergebnissicherung nach Thematisierung von Kriterien zur Kurvendiskussion.

Bei der Bearbeitung von **Extremwertproblemen**, die sich z.B. auf geometrische Objekte beziehen, können multimediale elektronische Lernumgebungen durch Einsatz von *dynamischer Geometriesoftware*, *Computeralgebrasystemen* und *Tabellenkalkulation* geschaffen werden, die von den Schülern wahlweise, nebeneinander oder miteinander verzahnt und sich ergänzend genutzt werden.

Die Modellierung kann nach unserer Erfahrung sehr gut durch Erstellen einer dynamischen Zeichnung mittels *EUKLID DynaGeo* geschehen. Durch Variation einer geeignet zu messenden geometrischen Größe (unabhängige Variable) und gleichzeitiger Berechnung der zu minimierenden bzw. maximierenden Zielgröße kann so im Sinne einer Simulation (durch *Ziehen mit der Zange*) eine numerische Lösung näherungsweise gefunden werden.

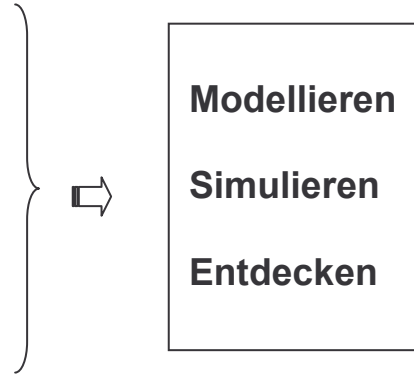
Ebenso bietet ein *Tabellenkalkulationsprogramm* wie z.B. *EXCEL* die Möglichkeit zur numerischen Lösung mittels Wertetabelle nach vorheriger Formeleingabe. Hier ist eine nachträgliche Genauigkeitssteigerung durch iterative Verfeinerung bei der Werteingabe möglich.

Für die analytische Lösung (vor allem bei komplexerem Funktionenmaterial) bietet sich der Einsatz eines *Computeralgebrasystems* wie *DERIVE* an, bei dem dann auch die zugehörigen Funktionsgraphen zur Veranschaulichung angezeigt werden können.

Die o.g. Werkzeuge bieten daneben auch weitere Möglichkeiten zur Behandlung von Extremwertproblemen in der Mittelstufe (z.B. im Umfeld von quadratischen Funktionen).

Unsere Bilanz zu den didaktischen Einsatzmöglichkeiten von EUKLID DynaGeo

- Geometrische Konstruktionen durchführen
- Zeichnung dynamisch verändern durch *Ziehen mit der Zange*
- Strecken und Winkel messen und problembezogene Terme berechnen
- Messen und Berechnen bei gleichzeitiger dynamischer Veränderung
- Situativen Nutzen von ausreichender Genauigkeit oder von noch bestehender Ungenauigkeit möglich
- Durch individuelle ästhetische Ausgestaltung affektive Lernerfahrungen ermöglichen



Reflektion unserer Unterrichtserfahrungen

- ✓ Entscheidende Lernprozesse benötigen den Diskurs im Unterrichtsgespräch. Medien- bzw. Werkzeugkompetenz ist der kommunikativen Kompetenz unterzuordnen.
- ✓ Die Strukturierung des Unterrichtsgegenstandes bleibt ein wichtiges Merkmal für die Unterrichtsqualität.
- ✓ Die Schüler fordern auch bei veränderter Lehrerrolle stets die leibhaftige Präsenz, d.h. den Ansprechpartner, Helfer, Berater und Organisator ihrer Lernprozesse, und verlangen auch bei weitestgehender Selbständigkeit stets nach einem Orientierungsrahmen.
- ✓ Der Technikeinsatz kann für den Lehrer / die Lehrerin sowohl entlastend, als auch belastend sein (einerseits verringerte Lehrerzentriertheit bei erhöhter Selbständigkeit der Schüler, andererseits die Technikabhängigkeit als Stressfaktor und Erfordernis einer evtl. alternativen Unterrichtsvorbereitung).
- ✓ Bei einem erhöhten Anteil einseitiger Kommunikation (Mensch-Maschine) sollte in derartigen Unterrichtssequenzen verstärkt Wert auf eine vorherige gemeinsame Lernorganisation oder die abschließende Präsentation und Diskussion der erarbeiteten Ergebnisse gelegt werden, um auch das sozial-kommunikative Lernen nicht zu vernachlässigen.
- ✓ Die Schüler dürfen die hochtechnisierte „Apparate-Welt“ (Computerlabor) nicht als entfremdete Lernumwelt empfinden, z.B. dadurch, dass der Lehrer / die Lehrerin einen hohen Anteil seiner / ihrer Aufmerksamkeit den technischen Geräten und nicht den Schülern widmet.

Arbeitsblatt für die Teilnehmer des Workshops (Auszug):

Pfingsttagung 21. Mai 2002 Bertram Burgner / Michael Meyer

Workshop 113

„Multimediale Lernumgebungen: Analyse von Unterrichtsbeispielen“

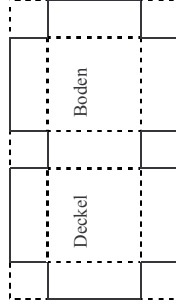
Bitte wählen Sie aus folgenden Extremwertproblemen zur Bearbeitung aus:

❖ Offene Schachtel

Von einem quadratischen Stück Pappe sollen an den Ecken derart Quadrate ausgeschnitten werden, dass das Reststück zu einer offenen Schachtel mit maximalem Volumen zusammengeklebt werden kann.

❖ Geschlossene Schachtel

Von einem rechteckigen Stück Pappe sollen derart Quadrate ausgeschnitten werden (s. Figur), dass das Reststück zu einer geschlossenen Schachtel mit maximalem Volumen zusammengeklebt werden kann.



❖ Baumstammproblem

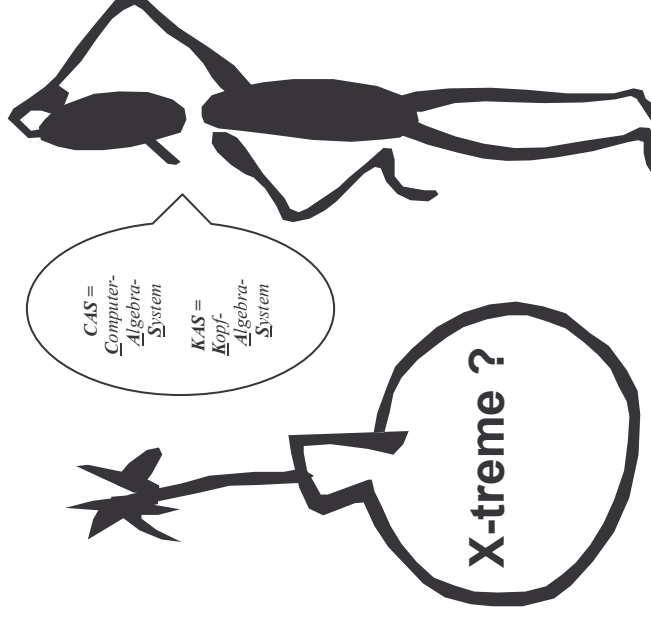
In einen Kreis vom Radius r soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt eingeschrieben werden.

❖ Rechteckige Glasplatte

Von einer rechteckigen Glasplatte ist ein an einer Ecke ein Stück in Form eines rechtwinkligen Dreiecks abgesprungen. Aus dem Rest soll eine rechteckige Scheibe maximaler Fläche geschnitten werden.

❖ Rechteck im gleichschenkligen Dreieck

Einem gleichschenkligen Dreieck soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt so eingeschrieben werden, dass eine Rechtecksseite auf der Basis des Dreiecks liegt.



Bitte wählen Sie aus folgenden Methoden zur Bearbeitung aus:

- Erstellen Sie zu dem gegebenen Extremwertproblem eine geeignete dynamische Zeichnung mittels **EUKLID DynaGeo** !
→ *Mentaleise* zu **Konstruieren**
Messen Sie geeignete Streckenlängen und berechnen Sie hieraus die zu optimierende Zielgröße in Abhängigkeit einer geeigneten Variablen !
→ *Abstand messen* unter **Messen&Rechnen**
Lösen Sie das Extremwertproblem näherungsweise numerisch !
→ *Variation der dynamischen Zeichnung durch Ziehen mit der Zange*
- Lösen Sie das Extremwertproblem exakt analytisch mit ihrem eigenen KAS oder mit dem CAS **DERIVE** !
- Erstellen Sie mittels **EXCEL** eine geeignete Wertetabelle zur numerischen Lösung des Extremwertproblems !