

Fach Reine Mathematik

**Homologie-Darstellungen des Wagoner-Komplexes
und eine Steinberg-Darstellung von $Gl_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$**

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Marko Petzold
aus Berlin
-2004-

Dekan:	Prof. Dr. Klaus Hinrichs
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Peter Schneider
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Wolfgang Lück
Tag der mündlichen Prüfung:	13. Juli 2004
Tag der Promotion:	21. Juli 2004

Einleitung

In [Wag75a] konstruiert Wagoner einen simplizialen Komplex aus der Struktur der Nebenklassen der unipotenten Radikale von semi-standard parabolischen Untergruppen der Gruppe $GL_n(k)$ für einen Körper k . Tatsächlich konstruiert er solche Komplexe auch für die allgemeinen linearen Gruppen mit Koeffizienten in einem beliebigen assoziativen Ring mit Eins R . Ganz ähnliche Komplexe hat auch Volodin in [Vol71] konstruiert. In [Wag77] zeigt Wagoner, dass eine mit Hilfe der Homotopiegruppen dieser Komplexe definierte höhere K -Theorie mit einer Reihe von anderen Definitionen von höherer algebraischer K -Theorie übereinstimmt. Insbesondere ist sie auch äquivalent zu Quillens K -Theorie (Satz 1.7). Vergleiche auch Suslin [Sus81]. Eine Besonderheit von Wagoners Komplex ist, dass er eine direkte Beziehung zum Tits-Gebäude von $GL_n(k)$ hat. In [Wag75b, §5] beschreibt Wagoner eine Projektion seines Komplexes auf das Tits-Gebäude und definiert einen weiteren Komplex, über den diese Projektion faktorisiert. Letzterer Komplex berechnet auch höhere K -Gruppen und liefert die Vorlage für die Definition des Wagoner-Komplexes \mathcal{W} einer zerfallenden, reduktiven, linearen algebraischen F -Gruppe bezüglich eines Unterkörpers F von k . Wir beschreiben eine natürliche CW -Struktur auf diesem Komplex und geben in diesem Kontext eine neue Definition von \mathcal{W} . Diese ist im Gegensatz zur ursprünglichen Definition unabhängig von der Wahl einer Borel-Untergruppe und eines maximalen split F -Torus.

Eine Methode, Darstellungen einer Gruppe G zu konstruieren, ist es, einen topologischen Raum mit G -Operation zu betrachten. Respektiert die Operation die Differenziale der singulären Ketten, so induziert sie eine Darstellung auf der rationalen singulären Homologie des Raumes.

Die F -rationalen Punkte $G(F)$ von G operieren zellulär auf \mathcal{W} . Dies induziert, genau wie bei dem Tits-Gebäude von $G(F)$, eine Darstellung auf dessen rationaler Homologie. Die Darstellung, welche das Tits-Gebäude im höchsten Grad seiner Homologie trägt, ist die Steinberg-Darstellung von $G(F)$. Das Tits-Gebäude und der Wagoner-Komplex von $G(F)$ haben die gleiche Dimension, und mit Hilfe der Projektion auf das Tits-Gebäude ist es nicht schwer zu sehen, dass die Steinberg-Darstellung ein Quotient der höchsten rationalen Homologie von \mathcal{W} ist. Um die Homologie-Darstellungen von \mathcal{W} weiter zu untersuchen, definieren wir in Abschnitt 2 eine Serie von Komplexen, welche als Variationen des Tits-Gebäudes hin zum Wagoner-Komplex aufgefasst werden können. Dann stellen wir im Fall $G = \mathrm{Sl}_n(k)$ innerhalb von \mathcal{W} Homotopien von Unterkomplexen von \mathcal{W} heraus und nutzen diese aus um die erste rationale Homologie von \mathcal{W} zu beschreiben. Unabhängig davon zeigen wir am Ende von Abschnitt 2.4 für $G(F) = \mathrm{Sl}_n(F)$ im Fall eines endlichen Körpers F , unter Verwendung der Tatsache $K_2(F) = 0$ und einer Spektralsequenz, dass die erste ganzzahlige Homologie von \mathcal{W} ungleich

null ist. Der Wagoner-Komplex von $G(F)$ ist also kein Bouquet von Sphären, falls seine Dimension größer als eins ist. Gleichwohl verschwindet in diesen Fällen seine rationale Homologie im Grad eins.

Obwohl wir uns in dieser Arbeit auf die Homologie-Darstellungen von \mathcal{W} konzentrieren, ist die Struktur dieses Komplexes aufgrund seiner Beziehung zur algebraischen K -Theorie auch für andere Fragestellungen interessant. Es sei noch erwähnt, dass Wagoner auch eine affine Version seiner Komplexe für $Sl_n(k)$ für einen lokalen Körper k definiert, welche dann zum Bruhat-Tits-Gebäude in Beziehung stehen.

In Abschnitt 3 definieren wir eine Steinberg-Darstellung für die Gruppe $Gl_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ für jede ganze Zahl $l \geq 2$. Wir konstruieren aus einem System von Untergruppen von $Gl_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ einen simplizialen Komplex und zeigen, dass dieser ein Bouquet von Sphären ist und die Steinberg-Darstellung im höchsten Grad seiner Homologie trägt. Wir führen diese Konstruktion gleichzeitig auch für bestimmte Untergruppen von $Gl_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ aus. Unter Verwendung der Struktur dieses Komplexes weisen wir die Irreduzibilität all dieser Darstellungen nach. Desweiteren zeigen wir, dass die hier definierte Steinberg-Darstellung mit einer von Hill in [Hil95] definierten Steinberg-Darstellung von $Gl_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ übereinstimmt.

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. P. Schneider herzlich für die fortlaufende Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit bedanken. Er hat Wagoners Komplex mit seiner Beziehung zu Gebäuden als ein für die Darstellungstheorie potentiell wertvolles Objekt erkannt und mein Interesse darauf gelenkt. Ich danke auch Dr. M. Strauch für die vielen mathematischen Konversationen, die für mich eine wertvolle Gelegenheit zum Gedankenaustausch waren, und J. Kohlhaase für seine Hilfe beim Aufsatz des Manuskripts.

Inhaltsverzeichnis

1	Der Wagoner-Komplex	6
1.1	Teilgeordnete Mengen mit Gruppenoperation	6
1.2	Ein Komplex für $\mathrm{Gl}_n(k)$ und algebraische K -Theorie	9
1.3	Zerfallende reduktive F -Gruppen	12
1.4	Definitionen des Wagoner-Komplexes von F -Gruppen	14
1.5	Die CW -Struktur und Apartments von $\mathcal{W}_{G(F)}$	18
1.6	Der Wagoner-Komplex von $\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_p)$	21
2	Homologie-Darstellungen des Wagoner-Komplexes	22
2.1	Approximationen von \mathcal{W}	22
2.2	Eine lange exakte Homologie-Sequenz	25
2.3	Homotopien im Wagoner-Komplex	31
2.4	Die erste Homologie von $\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_n(F)}$	35
3	Eine Steinberg-Darstellung für $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$	39
3.1	Ein System von Untergruppen von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$	39
3.2	Eine Steinberg-Darstellung	42
3.3	Die Steinberg-Darstellung als Homologie-Darstellung	44
3.4	Irreduzibilität der Darstellungen $S_{I_0,a}$	51
3.5	Hills verallgemeinerte Steinberg-Darstellung	55

1 Der Wagoner-Komplex

1.1 Teilgeordnete Mengen mit Gruppenoperation

Definition 1.1. Ein *simplizialer Komplex* S besteht aus einer Menge E und einer Menge S von nicht leeren Teilmengen von E , so dass für alle $e \in E$ auch $\{e\} \in S$ ist und jede nicht leere Teilmenge einer Menge $s \in S$ wieder in S liegt. Die einelementigen Teilmengen in S heißen Ecken und eine $(k+1)$ -elementige Teilmenge in S heißt k -Simplex. Ist E' eine Teilmenge von E , so bezeichne $\langle E' \rangle$ den Unterkomplex von X , welcher aus den Simplizes von X mit Ecken in E' besteht. Wir identifizieren die Menge E' häufig mit den Ecken und wir identifizieren auch Simplizes mit den durch sie gegebenen Unterkomplexen von X . Eine *simpliziale Abbildung* f zwischen zwei simplizialen Komplexen S und S' ist eine Abbildung, so dass für $s \subseteq s'$ in S auch $f(s) \subseteq f(s')$ in S' ist.

Definition 1.2. Eine *semi-teilgeordnete Menge* \mathfrak{M} ist eine Menge \mathfrak{M} zusammen mit einer Relation " \leq ", so dass für beliebige Elemente $x, y \in \mathfrak{M}$ gilt

$$x \leq x \text{ (Reflexivität)}$$

Falls $x \leq y$ und $y \leq x$, so ist $x = y$ (Antisymmetrie).

Erfüllt die obige Relation auch Transitivität, d.h. für $x, y, z \in \mathfrak{M}$ folgt aus $x \leq y$ und $y \leq z$ auch $x \leq z$, so ist \mathfrak{M} eine *teilgeordnete Menge*. Falls $x \leq y$ in \mathfrak{M} und $x \neq y$, schreiben wir $x < y$. Eine *total geordnete Menge* \mathfrak{M} ist eine teilgeordnete Menge, so dass für alle $x, y \in \mathfrak{M}$ entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ ist.

Sei \mathfrak{M} eine semi-teilgeordnete Menge. Der *Flaggenkomplex* $\Delta(\mathfrak{M})$ von \mathfrak{M} ist der simpliziale Komplex, welcher als Simplizes die endlichen strikt total geordneten Teilmengen (sog. Flaggen) hat. Man beachte, dass die Transitivität innerhalb von Flaggen erfüllt ist. Ein d -Simplex ist eine $(d+1)$ -elementige Flagge $\{x_0 < \dots < x_d\}$. Man kann Δ als Funktor von der Kategorie der semi-teilgeordneten Mengen und ordnungserhaltenden Abbildungen in die Kategorie der simplizialen Komplexe und simplizialen Abbildungen auffassen.

Die Menge der Simplizes eines simplizialen Komplexes Σ kann bezüglich der Inklusion selbst wieder als teilgeordnete Menge aufgefasst werden. Deren Flaggenkomplex $\Delta(\Sigma)$ wird dann auch die baryzentrische Unterteilung von Σ genannt. Solchen abstrakten simplizialen Komplexen kann man topologische Räume zuordnen, indem man für jedes d -Simplex eine Kopie des d -dimensionalen Standardsimplizes in \mathbb{R}^n hernimmt und diese mit Hilfe der

kanonischen Inklusionen gemäß den Inzidenzrelationen der Simplexes verklebt. Diesen topologischen Raum nennt man die *Realisierung* $|\Sigma|$ von Σ . Es gibt einen Homöomorphismus zwischen $|\Sigma|$ und $|\Delta(\Sigma)|$. Die simpliziale Homologie eines simplizialen Komplexes ist gleich der singulären Homologie seiner Realisierung. Wir werden die Realisierung eines simplizialen Komplexes Σ im Folgenden auch mit Σ bezeichnen, wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind.

Sei G eine Gruppe. Eine G -Operation von links auf \mathfrak{M} ist eine Abbildung $\cdot : G \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$, so dass für alle $x \leq y$ und z in \mathfrak{M} und alle $h, g \in G$ gilt $g.x \leq g.y$ und $g.(h.z) = (gh).z$ und $1.z = z$. Entsprechend ist eine G -Operation von rechts auf \mathfrak{M} definiert. Die Operation heißt *regulär*, wenn zusätzlich aus $x \leq y$ und $g.x \leq y$ folgt $x = g.x$. Eine entsprechende Definition haben wir auch für Operationen von rechts auf \mathfrak{M} .

Die G -Operation auf \mathfrak{M} induziert G -Operationen auf $\Delta(\mathfrak{M})$, auf den Ketten $C_*(\Delta(\mathfrak{M}))$ und auf der singulären Homologie $H_*(\Delta(\mathfrak{M}), \mathbb{Z})$. Die Operation von G auf $H_i(\Delta(\mathfrak{M}), \mathbb{Q})$ ist dann eine Darstellung von G , und eine solche Darstellung nennen wir *Homologie-Darstellung* von G (vgl. Curtis-Lehrer [CL82a]).

Sei V ein Vektorraum mit einer G -Darstellung von links und U ein Untervektorraum von V . Sei $H = \text{Stab}(U) = \{h \in G \mid hU = U\}$. Gilt $V = \bigoplus_{g \in G/H} gU$, dann ist $V = \text{ind}_H^G U$. Ist also z.B. X ein Raum mit G -Operation von links und ist X' eine Zusammenhangskomponente mit $H = \text{Stab}(X')$ und $X = \coprod_{g \in G/H} gX'$, so ist $H_i(X, \mathbb{Q}) = \text{ind}_H^G H_i(X', \mathbb{Q})$.

Sei I eine nicht leere Menge mit Teilmengen $\mathfrak{N}_i \subseteq \mathfrak{M}$ für jedes $i \in I$, so dass für alle $n \leq y \leq n'$ in \mathfrak{M} mit $n, n' \in \mathfrak{N}_i$ auch y in \mathfrak{N}_i liegt. Für verschiedene i und j aus I gebe es zwischen Elementen $x \in \mathfrak{N}_i$ und $y \in \mathfrak{N}_j$ keine Relation. Setze $\mathfrak{N}_I = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{N}_i$. Ein solches System nennen wir ein *diskretes System* von Teilmengen von \mathfrak{M} und bezeichnen es auch mit \mathfrak{N}_I . Für ein diskretes System von Teilmengen \mathfrak{N}_I definieren wir die semi-teilgeordnete Menge $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_I$ als die Menge $(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}_I) \cup \bigcup_I \{\mathfrak{N}_i\}$, versehen mit folgender semi-Teilordnung. Für $x, y \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N}_I$ und $i \in I$ definiere

$$\begin{aligned} x \preccurlyeq y &\Leftrightarrow x \leq y \text{ in } \mathfrak{M} \\ \mathfrak{N}_i \preccurlyeq y &\Leftrightarrow \exists n \in \mathfrak{N}_i \text{ mit } n \leq y \text{ in } \mathfrak{M} \\ x \preccurlyeq \mathfrak{N}_i &\Leftrightarrow \exists n \in \mathfrak{N}_i \text{ mit } x \leq n \text{ in } \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Definiert man noch $\mathfrak{N}_i \preccurlyeq \mathfrak{N}_i$, so ist die Reflexivität und aufgrund der Bedingungen an die \mathfrak{N}_i , auch die Antisymmetrie erfüllt. Es gibt eine natürliche Projektion von semi-teilgeordneten Mengen

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &\rightarrow \mathfrak{M}/\mathfrak{N}_I \\ n &\mapsto \mathfrak{N}_i \text{ für } n \in \mathfrak{N}_i \\ m &\mapsto m \text{ für } m \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N}_I. \end{aligned}$$

und diese induziert eine simpliziale Abbildung $\pi_{\mathfrak{N}_I} : \Delta(\mathfrak{M}) \rightarrow \Delta(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_I)$.

Definition 1.3. Eine Teilmenge \mathfrak{N} von \mathfrak{M} heiße *zulässig*, wenn für alle $n \leq y \leq n'$ in \mathfrak{M} mit $n, n' \in \mathfrak{N}$ auch y in \mathfrak{N} liegt und wenn für alle $n, n' \in \mathfrak{N}$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$ und jede Flagge $(e_0 < \dots < e_k)$ in $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ mit $e_i < n'$ und $n < e_{i+1}$ ein $m \in \mathfrak{N}$ existiert, so dass $(e_0 < \dots < e_i < m < e_{i+1} < \dots < e_k)$ eine Flagge in \mathfrak{M} ist.

Die letztere Bedingung ist quivalent zur Surjektivität von $\pi_{\mathfrak{N}}$. Für ein Simplex Σ von $\Delta(\mathfrak{M})$ definieren wir den kontrahierbaren Unterkomplex

$$\Sigma_{\mathfrak{N}} = \{\Theta \text{ Simplex von } \Delta(\mathfrak{M}) \mid \Sigma \cap (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) = \Theta \cap (\mathfrak{M} - \mathfrak{N})\}$$

von $\Delta(\mathfrak{M})$.

Lemma 1.4. Sei $\mathfrak{N}_I = \{\mathfrak{N}_i \subseteq \mathfrak{M} \mid i \in I\}$ ein diskretes System von zulässigen Teilmengen einer semi-teilgeordneten Menge \mathfrak{M} und seien $\Delta(\mathfrak{N}_i)$ und $\Sigma_{\mathfrak{N}_i} \cap \Delta(\mathfrak{N}_i)$ kontrahierbar für alle Simplizes Σ von $\Delta(\mathfrak{M})$ und alle $i \in I$. Dann ist $\Delta(\mathfrak{M})$ homotopiequivalent zu $\Delta(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_I)$.

Beweis. Wir betrachten die Überdeckung

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} = & \bigcup_{i \in I} \{\Delta(\mathfrak{N}_i)\} \cup \bigcup_{i \in I} \{\Sigma_{\mathfrak{N}_i} \cup \Delta(\mathfrak{N}_i) \mid \Sigma \text{ Simplex von } \Delta(\mathfrak{M}) \text{ mit } \Sigma \cap \mathfrak{N}_i \neq \emptyset\} \\ & \cup \{\Sigma \text{ Simplex in } \Delta(\mathfrak{M}) \mid \Sigma \cap \mathfrak{N}_I = \emptyset\} \end{aligned}$$

von $\Delta(\mathfrak{M})$. Für ein Simplex Σ in $\Delta(\mathfrak{M})$ mit $\Sigma \cap \mathfrak{N}_i = \emptyset$ ist $\Sigma_{\mathfrak{N}_i} = \Sigma$, und $\Sigma \cap (\Sigma'_{\mathfrak{N}_i} \cup \Delta(\mathfrak{N}_i)) = \Sigma \cap \Sigma'$ für ein weiteres Simplex Σ' in $\Delta(\mathfrak{M})$. Ist $\Sigma \cap \mathfrak{N}_i \neq \emptyset$, so ist $\Sigma \cap \mathfrak{N}_j = \emptyset$ für alle $j \in I$ mit $j \neq i$, weil keine zwei Elemente aus verschiedenen \mathfrak{N}_i und \mathfrak{N}_j in Relation stehen. Es folgt

$$(\Sigma_{\mathfrak{N}_i} \cup \Delta(\mathfrak{N}_i)) \cap (\Sigma'_{\mathfrak{N}_j} \cup \Delta(\mathfrak{N}_j)) = \Sigma \cap \Sigma'$$

für $i \neq j$. Man hat auch

$$(\Sigma_{\mathfrak{N}_i} \cup \Delta(\mathfrak{N}_i)) \cap (\Sigma'_{\mathfrak{N}_i} \cup \Delta(\mathfrak{N}_i)) = (\Sigma \cap \Sigma')_{\mathfrak{N}_i} \cup \Delta(\mathfrak{N}_i).$$

Da nach Voraussetzung $\Sigma_{\mathfrak{N}_i} \cap \Delta(\mathfrak{N}_i)$ kontrahierbar ist, sind auch die Räume $\Sigma_{\mathfrak{N}_i} \cup \Delta(\mathfrak{N}_i)$ kontrahierbar. Man sieht nun, dass ein beliebiger Schnitt von Elementen von \mathfrak{U} kontrahierbar ist. Die Überdeckung \mathfrak{U} ist also azyklisch. Wegen des Lemmas für azyklische berdeckungen ist der Nerv $N(\mathfrak{U})$ dieser Überdeckung homotopiequivalent zu $\Delta(\mathfrak{M})$.

Da die \mathfrak{N}_i zulässig in \mathfrak{M} sind, ist $\Delta(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_I)$ durch den simplizialen Komplex auf der Menge der Ecken $(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}_I) \cup \bigcup_{i \in I} \{\mathfrak{N}_i\}$ mit den Simplizes

$$\{\pi_{\mathfrak{N}_I}(\Sigma) \mid \Sigma \text{ Simplex in } \Delta(\mathfrak{M})\}$$

gegeben. Die Simplizes von $\Delta(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_I)$ korrespondieren durch folgende Zuordnung eins zu eins zu den Überdeckungsmengen von \mathfrak{U} .

$$\begin{aligned}\pi_{\mathfrak{N}_I}(\Sigma) &\mapsto \Sigma \text{ falls } \Sigma \cap \mathfrak{N}_I = \phi \\ \pi_{\mathfrak{N}_I}(\Sigma) &\mapsto \Sigma_{\mathfrak{N}_i} \cup \Delta(\mathfrak{N}_i) \text{ falls } \Sigma \cap \mathfrak{N}_i \neq \phi\end{aligned}$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass der Schnitt von Simplizes der Form $\pi_{\mathfrak{N}_I}(\Sigma)$ genau dann nicht leer ist, wenn der Schnitt ihrer Bilder unter dieser Zuordnung nicht leer ist. Der Nerv von $\Delta(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_I)$ bezüglich der (azyklischen) Überdeckung durch seine Simplizes ist also gleich $N(\mathfrak{U})$. \square

Sei \mathfrak{M} nun eine teilgeordnete Menge mit regulärer G -Operation von rechts. Wir definieren die teilgeordnete Menge der Orbits \mathfrak{M}/G indem wir auf der Menge der Orbits folgende Teilordnung einführen

$$x.G \leq y.G \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ mit } x \leq y.g$$

Dies definiert tatsächlich eine Teilordnung, da für $x.G \leq y.G$ und $y.G \leq x.G$ folgt, dass es $g, g' \in G$ gibt mit $x \leq y.g$ und $y \leq x.g'$. Es folgt $x \leq y.g \leq x.gg' \leq y.gg'g$. Aus der Regularität folgt nun $x = x.gg'$ und dann $x = y.g$ und daher $x.G = y.G$. Die Transitivität und die Reflexivität sind trivial. Ganz analog erhalten wir eine teilgeordnete Menge $G \setminus \mathfrak{M}$ für eine reguläre G -Operation von links auf \mathfrak{M} .

Proposition 1.5. *(siehe Curtis-Lehrer [CL82a, Prop. 1.8]) Man hat eine Homotopieäquivalenz $|\Delta(\mathfrak{M}/G)| \cong |\Delta(\mathfrak{M})|/G$, wobei letzterer Raum der topologische Raum der Orbits mit der natürlichen Topologie ist. Ein entsprechendes Resultat gilt auch für eine reguläre G -Operation von links.*

1.2 Ein Komplex für $\mathrm{Gl}_n(k)$ und algebraische K -Theorie

Zunächst führen wir einige Definitionen und Fakten für die BN -Paar-Struktur der allgemeinen linearen Gruppe mit Koeffizienten in einem Körper k an. Details hierzu finden sich etwa in Brown [Bro96] oder Bourbaki [Bou75]. Sei n eine natürliche Zahl größer oder gleich 2.

$$G = \mathrm{Gl}_n(k)$$

B = obere Dreiecksmatrizen in G

N = Matrizen mit genau einem Eintrag $\neq 0$ in jeder Zeile und Spalte

$$T_0 = B \cap N = \text{Diagonalmatrizen in } G$$

$W = N/T_0$ = Permutationen von n Elementen

S = Menge der Transpositionen τ_i in W , welche durch vertauschen der i -ten und $(i+1)$ -ten Spalte von rechts auf Matrizen operieren

Sei W außerdem je nach Kontext auch ein System von Repräsentanten in N . Diese Daten geben ein BN -Paar in G . Die Menge S ist ein System von Erzeugern in W . Die *standard parabolischen* Untergruppen von G sind diejenigen Untergruppen von G , die B enthalten. Die *parabolischen* Untergruppen sind die G -konjugierten der standard parabolischen Untergruppen. Die standard parabolischen Untergruppen sind untereinander nicht konjugiert. Für jede standard parabolische Untergruppe P gibt es ein eindeutiges $I \subseteq S$, so dass $P = B\langle I \rangle B$ ist, wobei $\langle I \rangle$ die von I erzeugte Untergruppe in W bezeichnet. Im Folgenden sei $P_I = B\langle I \rangle B$. Der Typ einer parabolischen Untergruppe ist gerade die Menge I ihrer zugehörigen standard parabolischen Untergruppe. Sei $U_I = R_u(P_I)$ das unipotente Radikal von P_I .

Allgemein sei für eine beliebige Gruppe G und eine Untergruppe H der Normalisator von H in G mit $N_G(H)$ bezeichnet. Für Elemente $g, h \in G$ sei ${}^g h = ghg^{-1}$, und entsprechend sei auch ${}^g H = gHg^{-1}$.

Wir wiederholen nun die Definition eines Komplexes aus Wagoner [Wag75a]. Dazu definieren wir die teilgeordnete Menge

$$\mathfrak{W}_G'' = \{g\sigma U_I \sigma^{-1} \mid \sigma \in W \text{ und } g \in G \text{ und } I \subsetneq S\} \text{ mit der Teilordnung}$$

$$g\sigma U_I \sigma^{-1} \geq h\tau U_{I'} \tau^{-1} \Leftrightarrow g\sigma U_I \sigma^{-1} \subseteq h\tau U_{I'} \tau^{-1} .$$

Die hier verwendete Notation ist entgegengesetzt zu derjenigen, die Wagoner verwendet. Dies hat offensichtlich keinen Einfluss auf den Flaggenkomplex von \mathfrak{W}_G'' . Die Gruppe G operiert von links auf \mathfrak{W}_G'' , welche dadurch zu einer teilgeordneten Menge mit G -Operation wird.

Definition 1.6. Der Flaggenkomplex dieser teilgeordneten Menge bzw. dessen geometrische Realisierung ist ein simplizialer Komplex und wird mit \mathcal{W}'_G bezeichnet.

Die Einbettung von $\mathrm{Gl}_n(k)$ nach $\mathrm{Gl}_{n+1}(k)$ als linker oberer Block induziert eine Einbettung $\mathcal{W}'_{\mathrm{Gl}_n(k)} \longrightarrow \mathcal{W}'_{\mathrm{Gl}_{n+1}(k)}$.

Satz 1.7. (Wagoner [Wag77]) Die höheren algebraischen K -Gruppen von k sind für $i \geq 1$

$$K_i(k) = \varinjlim_n \pi_{i-1}(\mathcal{W}'_{\mathrm{Gl}_n(k)})$$

Obige Definition lässt sich in zwei Richtungen verallgemeinern. Man kann an Stelle von k einen beliebigen assoziativen Ring mit Eins R betrachten und muss dann in den Matrizen in U_I Einträge aus R zulassen. Vergleiche hierzu die Definition in Wagoner [Wag75a, §1]. Für diese Komplexe gilt eine entsprechende Version von Satz 1.7.

Man kann aber auch andere reductive algebraische Gruppen G anstatt $\mathrm{Gl}_n(k)$ nehmen und einen entsprechenden Komplex dazu betrachten. Ansätze hierzu sind auch bereits in [Wag75a, §2] enthalten.

Lemma 1.8. *Die Gruppe N operiert von rechts regulär, frei und eigentlich auf \mathcal{W}'_G , so dass man einen Komplex \mathcal{W}'_G/N und eine Faserung*

$$\mathcal{W}'_G \longrightarrow \mathcal{W}'_G/N$$

erhält. Der Komplex \mathcal{W}'_G/N ist hierbei der Raum der Orbits von N auf \mathcal{W}'_G mit der natürlichen Topologie und kann mit $\Delta(\mathfrak{W}''_G/N)$ gleichgesetzt werden. Dieser Raum hat eine von \mathcal{W}'_G induzierte G -Operation von links.

Beweis. Es ist klar, dass N von rechts durch Multiplikation auf der teilgeordneten Menge \mathfrak{W}''_G operiert, also auch die Teilordnung respektiert. Um zu zeigen, dass N frei auf \mathfrak{W}''_G operiert, genügt es zu zeigen, dass für $\eta \in N$ aus $gU_I\eta = gU_I$ folgt $\eta = 1$. Dies ist aber klar, da $U_I \cap N = \{1\}$. Die Operation von N ist dann auf den Flaggen frei und eigentlich, und man erhält die gewünschte Faserung (s. Weibel [Wei94, Ex. 8.2.6]).

Kommen wir nun zur Regularität. Sei also $gU_I\eta \leq hU_J$ und $gU_I\eta' \leq hU_J$ in \mathfrak{W}''_G . Es ist zu zeigen, dass dann $\eta = \eta'$. Man hat $g^{-1}hU_J\eta^{-1} \subseteq U_I$ und dann gilt $g^{-1}h\eta^{-1} \in U_I$. Ebenso hat man $g^{-1}h\eta'^{-1} \in U_I$. Dann folgt auch $\eta'\eta^{-1} \in U_I$ und da $U_I \cap N = \{1\}$ folgt $\eta = \eta'$.

Die Äquivalenz $\mathcal{W}'_G/N \cong \Delta(\mathfrak{W}''_G/N)$ folgt aus der Regularität der N -Operation und 1.5. Die G -Operation von links auf \mathfrak{W}''_G überträgt sich auf den Quotienten \mathfrak{W}''_G/N , da die Operationen von G und N offensichtlich kommutieren. \square

Definition 1.9. Der *Wagoner-Komplex* von $\mathrm{Gl}_n(k)$ ist der Komplex $\mathcal{W}'_{\mathrm{Gl}_n(k)}/N$ und wird mit $\mathcal{W}_{\mathrm{Gl}_n(k)}$ bezeichnet.

Wir erhalten unmittelbar folgendes Korollar zu Satz 1.7.

Korollar 1.10. *Für $i \geq 3$ gilt*

$$K_i(k) = \varinjlim_n \pi_{i-1}(\mathcal{W}_{\mathrm{Gl}_n(k)})$$

Beweis. Da $\mathcal{W}'_G \longrightarrow \mathcal{W}_G$ eine Faserung ist, hat man eine lange exakte Sequenz von Homotopie-Gruppen

$$\dots \rightarrow \pi_i(N) \rightarrow \pi_i(\mathcal{W}'_G) \rightarrow \pi_i(\mathcal{W}_G) \rightarrow \pi_{i-1}(N) \rightarrow \dots$$

Die Homotopie-Faser ist hier N versehen mit der diskreten Topologie. \square

Es sei bemerkt, dass die rationale singuläre Homologie $H_i(\mathcal{W}_G, \mathbb{Q})$ von \mathcal{W}_G nach [CL82a, Proposition 3.8] isomorph zu $H_i(\mathcal{W}'_G, \mathbb{Q})^N$, der isotypischen Komponente der trivialen Darstellung von N in $H_i(\mathcal{W}'_G, \mathbb{Q})$, ist.

Man kann auf die gleiche Weise wie oben auch für die Gruppe $\mathrm{Sl}_n(k)$ einen Komplex $\mathcal{W}'_{\mathrm{Sl}_n(k)}$ definieren. Dieser kann mit einer Zusammenhangskomponente von $\mathcal{W}'_{\mathrm{Gl}_n(k)}$ identifiziert werden und hat somit die gleichen höheren Homotopiegruppen wie $\mathcal{W}'_{\mathrm{Gl}_n(k)}$. (Siehe Wagoner [Wag75a, Prop. 2])

1.3 Zerfallende reduktive F -Gruppen

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und F ein Unterkörper. Wir fassen im Folgenden die benötigte Theorie von reduktiven F -Gruppen zusammen. Zu den einzelnen Aussagen geben wir detaillierte Referenzen an, die sich auf Springers Buch [Spr98] beziehen.

Eine F -Gruppe ist eine lineare algebraische Gruppe über k , welche bereits über F definiert ist. Dies impliziert, dass G zu einer abgeschlossenen Untervarietät von einem affinen Raum \mathbb{A}_k^r isomorph ist, dessen definierendes Ideal von Polynomen mit Koeffizienten in F erzeugt wird. Für eine F -Gruppe G seien die F -rationalen Punkte $G(F)$ die Gruppe der F -Morphismen von \mathbb{A}_k^0 , dem 0-dimensionalen affinen Raum, nach G , oder alternativ auch die Gruppe $\text{Hom}_F(\mathcal{O}_G(G), k)$. Die algebraische Gruppe \mathbb{G}_m ist als Varietät des Ideals $\langle xy - 1 \rangle$ in $k[x, y]$ definiert. Diese entspricht gerade k^\times und \mathbb{G}_m trägt auch die Gruppenstruktur von k^\times . Man sieht, dass \mathbb{G}_m über allen Unterkörpern F von k definiert ist.

Sei G eine zusammenhängende reduktive F -Gruppe und betrachte die Struktur der parabolischen F -Untergruppen von G . Das *unipotente Radikal* einer parabolischen F -Untergruppe P ist die maximale abgeschlossene, zusammenhängende, normale, unipotente Untergruppe $R_u(P)$ von P und ist über F definiert (16.1.1). Außerdem gilt $P = N_G(R_u(P))$ (siehe [BT65, S.101]). Es gibt eine über F definierte, abgeschlossene, reduktive, zusammenhängende Untergruppe M von P , so dass $M \times R_u(P) \rightarrow P$ ein F -Isomorphismus von Varietäten ist. M heißt *F -Levi-Untergruppe* von P , und obige Zerlegung ist eine Levi-Zerlegung (14.4.5 + 16.1.1). Die Gruppe $R_u(P)(F)$ operiert durch Konjugation einfach transitiv auf der Menge der F -Levi-Untergruppen von P (16.1.1).

Unsere F -Gruppe G heißt *zerfallend* oder *split*, wenn es einen maximalen F -Torus gibt, welcher split ist, also einen maximalen F -Torus, welcher über F isomorph zu \mathbb{G}_m^s ist, für ein $s > 0$. Sei G nun zusätzlich zerfallend und fixiere einen maximalen split F -Torus T von G .

Die Wurzeln Φ von G bezüglich T sind die nichttrivialen Gewichte von T in der Lie-Algebra von G . Diese bilden eine Teilmenge der rationalen Charaktere von T und sind ein Wurzelsystem (15.3.1+[Bou75, Ch. VI]). Fixiere ein System von positiven Wurzeln Φ^+ und sei D die Basis von einfachen Wurzeln in Φ^+ . Für eine Teilmenge $I \subseteq D$ sei Φ_I die Menge der Wurzeln erzeugt von I . Sei weiter S die zu D korrespondierende Menge von Erzeugern in der endlichen Gruppe $W = N_G(T)/T$. Die Gruppe $N = N_G(T)$ ist über F definiert und $S \subseteq W$ besitzt ein Repräsentantensystem in $N(F)$ mit dem wir W gelegentlich gleichsetzen (15.3.5+15.3.7). Für ein $I \subseteq S$ sei W_I die von I erzeugte Untergruppe von W und N_I das Urbild von W_I unter der Projektion $N \rightarrow N/T$. Zu jeder Teilmenge I von S definiert man eine standard parabolische F -Gruppe P_I und eine standard F -Levi-Untergruppe M_I (siehe die Bemerkungen vor 15.4.5). Man hat $P_I = P_\phi W_I P_\phi$ und $N_I = N \cap P_I$

und wir setzen noch $U_I = R_u(P_I)$. N_I ist eine F -Gruppe (12.1.5). Zu jeder Wurzel $\alpha \in \Phi$ korrespondiert eine unipotente F -Untergruppe U_α und es gilt $U_I = \prod_{\alpha \in \Phi^+ - \Phi_I} U_\alpha$. Die Gruppe U_α ist die *Wurzelgruppe* zu der Wurzel α . Jede parabolische F -Gruppe ist zu einer eindeutig bestimmten standard parabolischen F -Gruppe durch ein Element in $G(F)$ konjugiert, und P_I und P_J sind verschieden, wenn I und J verschieden sind. Insbesondere sind keine zwei standard parabolischen F -Gruppen konjugiert (15.4.6). Die minimale parabolische F -Gruppe P_ϕ ist eine Borel-Untergruppe und $L_\phi = T$ (15.4.7). Insbesondere enthält jede parabolische F -Gruppe P einen maximalen split F -Torus. Je zwei maximale split F -Tori sind in P durch ein Element in $P(F)$ konjugiert (15.2.6+16.1.1).

Die Gruppen $P_\phi(F)$ und $N(F)$ bilden ein Tits-System oder BN -Paar von $G(F)$ (Bemerkung nach 16.1.3). Die parabolischen Untergruppen einer Gruppe mit BN -Paar sind per Definition die Gruppen, die eine zu B konjugierte Untergruppe enthalten. Eine standard parabolische Untergruppe einer Gruppe mit BN -Paar ist ähnlich wie oben durch $B\langle I \rangle B$ für ein $I \subseteq S$ charakterisiert, wobei S das Erzeugendensystem von $W = N/(B \cap N)$ des BN -Paares ist. Die parabolischen Untergruppen des BN -Paares $(P_\phi(F), N(F))$ sind also gerade die F -rationalen Punkte der parabolischen F -Untergruppen von G . Die Inklusion von parabolischen Untergruppen eines BN -Paares ist die Inzidenzrelation eines simplizialen Komplexes, welcher ein Gebäude ist (Brown [Bro96]).

Das Tits-Gebäude von $G(F)$ ist das Gebäude bezüglich des BN -Paares $(P_\phi(F), N(F))$. Wir wollen hier, statt des eigentlichen Gebäudes, dessen erste baryzentrische Unterteilung betrachten, also den Flaggenkomplex der teilgeordneten Menge der Simplizes des Tits-Gebäudes. Dies macht topologisch und im Wesentlichen auch kombinatorisch keinen Unterschied. Wir betrachten also den Flaggenkomplex $\mathcal{T}_{G(F)}$ zu der teilgeordneten Menge

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{G(F)} &= \{P(F) \mid P \text{ parabolische } F\text{-Untergruppe von } G\} \\ P(F) \geq P'(F) &\Leftrightarrow P \subseteq P' \end{aligned}$$

und bezeichnen diesen als Tits-Gebäude von $G(F)$. Man kann in dieser Definition anstelle der $P(F)$ auch die parabolischen F -Untergruppen selbst nehmen, da diese sich eins zu eins entsprechen. Nach dem was oben gesagt wurde, ist jede parabolische F -Untergruppe zu einer eindeutig bestimmten standard parabolischen F -Untergruppe konjugiert. Es ist wohlbekannt, dass man auch die Nebenklassen anstelle der Konjugierten der P_I für die Definition von $\mathfrak{I}_{G(F)}$ benutzen kann. Dies folgt letztlich aus der Tatsache, dass für ein $g \in G$ mit ${}^g P_J \subseteq P_I$ folgt $g \in P_I$. Die Operation von $G(F)$ auf $\mathcal{T}_{G(F)}$ ändert sich dann von Konjugation zu Linksmultiplikation.

Das *Standardapartment* in dem Gebäude ist der Komplex $A_T = \langle {}^n P_I(F) \mid n \in N(F), I \subseteq S \rangle$. Ein *Apartment* ist ein zu A_T konjugierter Komplex. Wir

zeigen nun, dass das Standardapartment durch

$$A_T = \langle P(F) \mid P \text{ parabolische } F\text{-Untergruppe mit } P \supseteq T \rangle$$

gegeben ist. Sei also $T \subseteq g'P_I$ mit $g' \in G(F)$. Weil je zwei maximale split F -Tori in P_I durch ein Element in $P_I(F)$ konjugiert sind, gibt es ein $p \in P_I(F)$ mit $g'^{-1}T = {}^pT$. Es folgt $T \subseteq g'pP_\phi$. Setze $g = g'p$. Ist w_0 das längste Element in W , so ist $U_\phi^- = {}^{w_0}U_\phi$. Nach der starken Bruhat-Zerlegung hat man eindeutig bestimmte Elemente $b \in P_\phi$, $w \in W$ und $u \in U_\phi \cap {}^wU_\phi^-$ mit $g = uwb$. Es folgt $gP_\phi = {}^{uw}P_\phi \supseteq T$, und dann gibt es, weil die maximalen split F -Tori die Levi-Gruppen in P_ϕ sind, ein eindeutiges $u' \in U_\phi(F)$ mit $w^{-1}u^{-1}T = u'T$. Dann ist $uwu' \in N$ und nach der starken Bruhat-Zerlegung folgt $uwu' = w$ und dann $u' = u = 1$. Das bedeutet $g = wb = g'p$ und dann ist $g'P_I = {}^wP_I$, und wir identifizieren w mit einem Repräsentanten in $N(F)$.

Wir sehen somit, dass die Apartments von $\mathcal{T}_{G(F)}$ gerade zu den maximalen split F -Tori korrespondieren. Als Referenz zur Theorie der Gebäude bietet sich z.B. Brown [Bro96] an.

1.4 Definitionen des Wagoner-Komplexes von F -Gruppen

In Analogie zu Abschnitt 1.2 definieren wir die teilgeordnete Menge

$$\mathfrak{W}''_{G(F)} = \{g\sigma U_I \sigma^{-1} \mid \sigma \in N(F), g \in G(F) \text{ und } I \subsetneq S\}$$

$$g\sigma U_I \sigma^{-1} \geq h\tau U_{I'} \tau^{-1} \Leftrightarrow g\sigma U_I \sigma^{-1} \subseteq h\tau U_{I'} \tau^{-1} .$$

Die Gruppe $N(F)$ operiert regulär und frei durch Multiplikation von rechts auf $\mathfrak{W}''_{G(F)}$. Der Beweis von Lemma 1.8 aus dem letzten Abschnitt überträgt sich direkt auf diese Situation.

Wir definieren nun noch eine weitere teilgeordnete Menge (vgl. [Wag75b, §5])

$$\mathfrak{W}'_{G(F)} = \{gU_I N_I \mid I \subsetneq S, g \in G(F)\} \text{ mit der Ordnung}$$

$$gU_I N_I \geq g'U_J N_J \Leftrightarrow \exists \eta \in N_I(F) \text{ mit } g\eta U_I \subseteq g'U_J .$$

Lemma 1.11. *Man hat eine ordnungserhaltende Bijektion*

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}'_{G(F)} &\rightarrow \mathfrak{W}''_{G(F)}/N(F) \\ gU_I N_I &\mapsto gU_I \cdot N(F) \end{aligned}$$

Beweis. Für die Surjektivität genügt es zu bemerken, dass jeder Orbit

$$g\sigma U_I \sigma^{-1} \cdot N(F)$$

in $\mathfrak{W}''_{G(F)}$ einen Repräsentanten der Form hU_I hat. Kommen wir zur Wohldefiniertheit. Sei dazu $gU_I N_I = g'U_J N_J$. Dann ist $U_I N_I = U_J N_J$ und dann auch $N_I = U_I N_I \cap N = U_J N_J \cap N = N_J$. Es folgt $I = J$. Es gibt dann ein $\eta \in N(F)$ mit $gU_I \eta = g'U_J$ und man hat die Gleichheit der Orbits $(gU_I) \cdot N(F) = (g'U_J) \cdot N(F)$. Wir zeigen nun die Injektivität. Ist $(gU_I) \cdot N(F) = (g'U_J) \cdot N(F)$, dann gibt es ein $\eta \in N(F)$ mit $gU_I = g'U_J \eta$. Es folgt $g^{-1}g'\eta \in U_I$ und damit $U_J \eta = \eta U_I$. Es folgt $\eta U_I \eta^{-1} = U_J$, und nach Lemma 1.14 zusammen mit einer entsprechenden Aussage über parabolische Untergruppen folgt $J = I$. Dann ist $\eta \in N_G(U_I) \cap N = P_I \cap N = N_I$. Es folgt $g'U_J \eta = gU_I$ und dann $g'U_J N_J = gU_I N_I$. Ersetzt man an den erforderlichen Stellen “=” durch “ \geq ” so folgt auch, dass diese Bijektion in beiden Richtungen ordnungserhaltend ist. \square

Definition 1.12. Der *Wagoner-Komplex* $\mathcal{W}_{G(F)}$ von G bezüglich F ist die geometrische Realisierung des Flaggenkomplexes zu $\mathfrak{W}'_{G(F)}$.

Für die unipotenten Untergruppen U_I gilt, dass $gU_I \subseteq g'U_{I'}$ genau dann, wenn $gU_I(F) \subseteq g'U_{I'}(F)$ ist. Man sieht leicht, dass es genügt, dies für die standard unipotenten Radikale zu zeigen. Die algebraische Gruppe U_ϕ ist als Varietät zu dem affinen Raum $\mathbb{A}^{|\Phi^+|}$ isomorph. Die Wurzelgruppen sind hierbei eindimensionale Unterräume, welche U_ϕ linear unabhängig aufspannen. Da T_0 maximal split ist, sind alle Wurzelgruppen über F definiert und haben immer F -rationale Punkte ([Spr98, 14.3.13]). Die anderen standard unipotenten Radikale U_I werden von den Wurzelgruppen zu den Wurzeln in $\Phi^+ - \Phi_I$ erzeugt und die Aussage folgt.

$\mathrm{Sl}_n(k)$ ist eine einfache, zusammenhängende, lineare algebraische Gruppe, welche über \mathbb{F}_q für alle $q = p^r$ definiert ist. Das hier verwendete BN -Paar korrespondiert dann zu dem in Abschnitt 1.2 beschriebenen BN -Paar von $\mathrm{Gl}_n(k)$ insoweit, als dass die teilgeordneten Mengen der parabolischen Untergruppen isomorph sind. Man sieht dann leicht, dass auch

$$\mathfrak{W}''_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)}/N_{\mathrm{Gl}_n(k)}(T)(\mathbb{F}_q) \cong \mathfrak{W}''_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)}/N_{\mathrm{Sl}_n(k)}(T)(\mathbb{F}_q).$$

Es folgt, dass der in Abschnitt 1.2 definierte Raum $\mathcal{W}_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)}$ homöomorph zu dem hier definierten Raum $\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)}$ ist, so wie auch das (kombinatorische) Tits-Gebäude von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)$ mit dem von $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)$ übereinstimmt.

Es sei noch angeführt, dass im Allgemeinen $N_G(T)(F) \neq N_G(T(F))$ ist, wie das Beispiel $G(F) = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_2)$ zeigt. Das BN -Paar einer solchen endlichen Gruppe lässt sich also natürlicher beschreiben, wenn man die Sprache der algebraischen Gruppen verwendet.

Wir geben nun eine alternative Definition für den Wagoner-Komplex einer zerfallenden reduktiven F -Gruppe. Diese Definition hängt nicht mehr von der Wahl einer F -Borel-Untergruppe und eines maximalen split F -Torus ab.

Um dies zu zeigen, wählen wir zunächst eine F -Borel-Untergruppe B und einen maximalen split F -Torus T_0 in B aus. Ansonsten verwenden wir alle zuvor eingeführten Bezeichnungen.

Lemma 1.13. *Es gilt*

1. *Alle maximalen split F -Tori in der auflösbaren Gruppe $U_I T_0$ sind durch ein Element in $U_I(F)$ konjugiert.*
2. *Der Normalisator von $U_I T_0$ in G ist $N_G(U_I T_0) = U_I N_I$.*

Beweis. In einer auflösbaren Gruppe wie $U_I T_0$ sind zwei maximale F -Tori durch ein Element in $(U_I T_0)(F)$ konjugiert (Springer [Spr98, 14.4.3]) und dann auch durch ein Element in $U_I(F)$. Die unipotenten Elemente in $U_I T_0$ sind gerade die Elemente in U_I . Ist also $g \in N_G(U_I T_0)$, so ist ${}^g U_I \subseteq U_I$ und damit ist $g \in N_G(U_I) = P_I$. Es gilt auch ${}^g T_0 \subseteq U_I T_0$. Weil alle maximalen Tori in einer auflösbaren Gruppe konjugiert sind (Springer [Spr98, Th. 6.3.5]), gibt es ein $u \in U_I$ mit ${}^g T_0 = {}^u T_0$. Es folgt $g^{-1}u \in N_G(T_0)$ und da $g, u \in P_I$ folgt $u^{-1}g \in N \cap P_I = N_I$. Insgesamt hat man $g \in U_I N_I$. Es ist klar, dass $U_I N_I \subseteq N_G(U_I T_0)$ ist. \square

Lemma 1.14. *Für $I, J \subseteq S$ und $g \in G$ ist ${}^g U_I \subseteq U_J$ äquivalent zu ${}^g P_I \supseteq P_J$.*

Beweis. Gilt ${}^g P_I \supseteq P_J$, so ist auch $gP_I \supseteq P_J$ und daher $g \in P_I$ und es folgt ${}^g U_I = U_I \subseteq U_J$. Sei also ${}^g U_I \subseteq U_J$. Nach der Bruhat-Zerlegung gibt es $b \in B$, $u \in U$ und $w \in W$ mit $g = uwb$. Liegt g nicht in $P_I = BW_I B$, so ist $w \notin W_I$. Da U_I von B normalisiert wird ist ${}^g U_I = {}^{uw} U_I$. Weil $w \notin W_I$ gibt es eine Wurzeluntergruppe U_α in U_I , so dass ${}^w U_\alpha$ zu einer negativen Wurzel korrespondiert, also nicht in U liegt. Dann liegt ${}^{uw} U_\alpha$ auch nicht in U und es folgt im Widerspruch zur Voraussetzung ${}^g U_I \subseteq U_J$. Also liegt g in P_I und es folgt ${}^g U_I = U_I \subseteq U_J$. Hieraus folgt nun ${}^g P_I \supseteq P_J$. \square

Definiere eine weitere teilgeordnete Menge

$$\mathfrak{W}_{G(F)} = \{ {}^g(U_I T_0) \mid g \in G(F), I \subsetneq S \} \text{ mit der Teilordnung}$$

$${}^g(U_I T_0) \geq {}^h(U_I T_0) \Leftrightarrow {}^g(U_I T_0) \subseteq {}^h(U_I T_0)$$

Die Gruppen U_I sind F -Gruppen und T_0 ist ein maximaler split F -Torus. Man beachte, dass man sich in dieser Definition nicht auf den Kontext von endlichen abstrakten Gruppen beschränken kann, wie man im Fall von $G(F) = \text{Sl}_n(\mathbb{F}_2)$ sieht. Dort ist $T_0(\mathbb{F}_2)$ die triviale Untergruppe.

Proposition 1.15. *Es gibt eine in beiden Richtungen ordnungserhaltende Bijektion*

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{W}'_{G(F)} &\longrightarrow \mathfrak{W}_{G(F)} \\ gU_I N_I &\mapsto {}^g(U_I T_0) \end{aligned}$$

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert, da aus $gU_I N_I = hU_J N_J$ folgt, dass $I = J$ ist und $h^{-1}g$ in $U_I N_I$, dem Normalisator von $U_I T_0$, liegt (s. Lemma 1.13). Man hat Injektivität, da aus ${}^g(U_I T_0) = {}^h(U_J T_0)$ folgt ${}^g U_I = {}^h U_J$ und mit Lemma 1.14 gilt dann $I = J$. Es folgt weiter $h^{-1}g \in N_G(U_I T_0) = U_I N_I$ und somit $gU_I N_I = hU_J N_J$. Die Surjektivität von ψ ist klar.

Sei $gU_I N_I \geq hU_J N_J$, dann gibt es gemäß Definition der Ordnung ein $\eta \in N_I$ mit $g\eta U_I \subseteq hU_J$. Für ein $u \in U_J$ hat man also $\eta = g^{-1}hu$. Es folgt $g^{-1}hu T_0 = T_0$. Da $u \in U_J$ und $T_0 U_J = U_J T_0$ ist, gilt ${}^g T_0 \subseteq {}^h(U_J T_0)$. Man hat $g^{-1}hu \in N_I$ und daher auch $g^{-1}h \in P_I$. Aus $U_I \subseteq U_J$ folgt ${}^{h^{-1}g} U_I \subseteq U_J$, weil U_I von P_I normalisiert wird. Es folgt ${}^g U_I \subseteq {}^h(U_J T_0)$. Insgesamt ergibt sich ${}^g(U_I T_0) \subseteq {}^h(U_J T_0)$ und somit ist ψ ordnungserhaltend.

Sei jetzt umgekehrt ${}^g(U_I T_0) \subseteq {}^h(U_J T_0)$. Die unipotenten Elemente in ${}^h(U_J T_0)$ sind die Elemente in ${}^h U_J$. Daher gilt ${}^g U_I \subseteq {}^h U_J$. Nach Lemma 1.14 folgt daraus ${}^g P_I \supseteq {}^h P_J$ und dann auch $h^{-1}g \in P_I$ und $U_I \subseteq U_J$. Nun ist ${}^g T_0 \subseteq {}^h(U_J T_0)$. Alle maximalen split F -Tori in der auflösbaren Gruppe $U_J T_0$ sind durch ein Element in $U_J(F)$ konjugiert (Lemma 1.13). Es gibt also ein $u \in U_J(F)$ mit ${}^{h^{-1}g} T_0 = {}^u T_0$. Es folgt $u^{-1}h^{-1}g \in N$. Wir haben eben gesehen, dass $h^{-1}g \in P_I$. Es gilt also $u^{-1}h^{-1}g \in N \cap P_I = N_I$. Mit $\eta = g^{-1}hu \in N_I(F)$ gilt dann $\eta U_I \subseteq g^{-1}hu U_J$. Das bedeutet $g\eta U_I \subseteq hU_J$ und somit nach Definition $gU_I N_I \leq hU_J N_J$. \square

Wir notieren noch eine direkte Folgerung aus dieser Proposition.

Korollar 1.16. *$\mathcal{W}_{G(F)}$ kann mit dem Flaggenkomplex von $\mathfrak{W}_{G(F)}$ identifiziert werden.*

Betrachte Untergruppen von der Form UT mit dem unipotenten Radikal U einer parabolischen F -Untergruppe P und einem maximalen split F -Torus T in P . Es gibt ein $g \in G(F)$, so dass ${}^g U$ das unipotente Radikal einer standard parabolischen F -Untergruppe P_I ist. Dann ist ${}^g T$ ein Torus in ${}^g(UT) = U_I {}^g T$. Es gibt ein $p \in P_I(F)$ mit ${}^{pg} T = T_0$. Es folgt ${}^{pg}(UT) = U_I T_0$. Eine Gruppe wie UT ist also konjugiert zu einer Gruppe der Form $U_I T_0$ und umgekehrt ist natürlich jede Konjugierte von $U_I T_0$ von der Form UT mit dem unipotenten Radikal U einer parabolischen F -Untergruppe P und einem maximalen split F -Torus T in P . Man hat also

$$\mathfrak{W}_{G(F)} = \{UT \subseteq G \mid \exists P \subsetneq G \text{ parabolische } F\text{-Gruppe mit } U = R_u(P), \\ T \subseteq P \text{ ein maximaler } F\text{-split } F\text{-Torus}\}$$

mit der Umkehrung der Inklusion als Teilordnung, und damit ist sowohl $\mathfrak{W}_{G(F)}$ als auch der Wagoner-Komplex $\mathcal{W}_{G(F)}$ von keiner Wahl mehr abhängig.

1.5 Die CW-Struktur und Apartments von $\mathcal{W}_{G(F)}$

Wir fixieren jetzt die zerfallende reduktive F -Gruppe G und entfernen den Index $G(F)$ von der Notation $\mathcal{W}_{G(F)}$ und $\mathcal{T}_{G(F)}$. Ferner führen wir noch die Notationen $\mathcal{T}_I = \mathcal{T}_{M_I(F)}$ und $\mathcal{W}_I = \mathcal{W}_{M_I(F)}$ ein. Wir wollen in der Definition des Tits-Gebäudes die Gruppen P anstelle der $P(F)$ verwenden. Setze $d = |S| - 1$. Wir führen die von Wagoner beschriebene Projektion auf das Tits-Gebäude ein.

Lemma 1.17. *Man hat eine surjektive $G(F)$ -äquivalente simpliziale Abbildung*

$$\begin{aligned} pr : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathcal{T} \\ gU_I N_I &\mapsto {}^g P_I \end{aligned}$$

beschrieben auf den Ecken der jeweiligen Komplexe.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass diese Abbildung von einem $G(F)$ -äquivalenten Morphismus von teilgeordneten Mengen herrührt. Für diesen Beweis verwenden wir die Schreibweise mit den Nebenklassen für \mathcal{T} . Betrachte also den Morphismus $\mathfrak{W}_G \rightarrow \mathfrak{T}_G$, $gU_I N_I \mapsto gP_I$. Wir zeigen seine Wohldefiniertheit. Wenn $gU_I N_I = g'U_J N_J$ ist, folgt $I = J$, und es gilt $g^{-1}g' \in U_I N_I \subseteq P_I$. Ist $gU_I N_I \geq g'U_J N_J$, so gibt es ein $\eta \in N_I(F)$ mit $g\eta U_I \subseteq g'U_J$. Es folgt $U_I \subseteq U_J$, und damit auch $P_I \supseteq P_J$. Man hat auch $g'^{-1}g\eta \in U_J \subseteq P_J$ und damit $g\eta P_I = gP_I \supseteq g'P_J$.

Die $G(F)$ -Äquivalenz und Surjektivität dieser Abbildung ist auch klar. \square

Definition 1.18. Das *Apartment* A_T in \mathcal{W}_I ist ein Unterkomplex erzeugt von Ecken ${}^g(T_0 U_J)$ mit $g \in G(F)$ und $J \subsetneq I$, welche einen gemeinsamen maximalen split F -Torus T enthalten. Das *Standardapartment* ist der Komplex erzeugt von den Ecken, die den Torus T_0 enthalten.

Lemma 1.19. *Unter der Projektion von \mathcal{W} auf das Gebäude \mathcal{T} wird ein Apartment homöomorph auf ein Apartment in \mathcal{T} abgebildet und ist daher eine d -Sphäre. Die Projektion pr induziert eine Bijektion zwischen den Mengen der Apartments. Je zwei Ecken in \mathcal{W} , welche zu F -Borel-Untergruppen von G korrespondieren, liegen in einem gemeinsamen Apartment.*

Beweis. Die Ecken in \mathcal{W} , die den Torus T_0 enthalten, sind gerade die ${}^\eta U_J T_0$ mit $J \subsetneq S$ und $\eta \in N(F)$, denn falls $T_0 \in {}^g(U_J T_0)$ ist, gibt es ein $u \in U_J$

mit $T_0 = {}^g u T_0$, und dann ist $gu \in N$.

Diese Ecken gehen unter pr gerade auf die ${}^n P_J$. Das Standardapartment von \mathcal{W} wird also von pr homöomorph auf das Standardapartment von \mathcal{T} abgebildet. Für alle anderen Apartments erhält man die erste Aussage durch Konjugation.

Betrachte die Menge Sk_0 der Ecken in \mathcal{W} , welche den F -Borel-Untergruppen von G entsprechen. Die Abbildung pr ist bijektiv auf Sk_0 . Für verschiedene Tori T sind die Mengen $A_T \cap Sk_0$ in \mathcal{W} verschieden, weil in \mathcal{T} die Menge der Ecken, die zu Borel-Gruppen korrespondieren, in verschiedenen Apartments verschieden ist. Die Projektion pr induziert also eine Bijektion der Mengen der Apartments, da beide Mengen zu der Menge der maximalen split F -Tori korrespondieren.

Seien E und E' in Sk_0 . Im Tits-Gebäude \mathcal{T} sind $pr(E)$ und $pr(E')$ in einem gemeinsamen Apartment A enthalten. Das eindeutige Apartment in \mathcal{W} im Urbild von A enthält dann E und E' . \square

Es ist jedoch im Allgemeinen nicht richtig, dass zwei beliebige Ecken in \mathcal{W}_G in einem gemeinsamen Apartment liegen. Der Komplex \mathcal{W}_G ist im Allgemeinen also kein Gebäude.

Für $J \subsetneq I$ und einen maximalen split F -Torus T in M_J sei nun

$$A_{J,T} = \langle {}^g(U_{J'}T_0) \in \mathfrak{W}_I | J' \subsetneq J, U_{J'}T \subsetneq {}^g(U_{J'}T_0) \rangle.$$

Für $J \subseteq I$ hat man eine Einbettung von teilgeordneten Mengen gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta : \mathfrak{W}_J &\longrightarrow \mathfrak{W}_I \\ {}^g(T_0(U_{J'} \cap M_J)) &\longmapsto {}^g(T_0 U_{J'}) \end{aligned}$$

und diese induziert eine Inklusion $\delta : \mathcal{W}_J \rightarrow \mathcal{W}_I$. Man beachte, dass dieser Morphismus von der Wahl einer parabolischen F -Untergruppe P von M_I abhängt, welche M_J als Levi-Komponente enthält. Wir haben hier $P = P_J$ gewählt. Die Abbildung δ kann auf den teilgeordneten Mengen als Multiplikation mit ${}^g U_J$ aufgefasst werden. Man sieht dann, dass $A_{J,T}$ das Bild eines Apartments von \mathcal{W}_J ist. Die Unterkomplexe $\bar{A}_{J,T} = \langle {}^g(U_{J'}T_0) \in \mathfrak{W}_I | J' \subsetneq J, U_{J'}T \subseteq {}^g(U_{J'}T_0) \rangle$ von \mathcal{W}_I sind dann $|J|$ -Zellen. Die Menge der j -Zellen von \mathcal{W}_I mit $0 \leq j \leq d$ sei die Menge

$$C_j(\mathcal{W}_I) = \bigcup_{|J|=j} \{ {}^g \bar{A}_{J,T_0} | g \in M_I(F) \}.$$

Jedes j -Simplex von \mathcal{W}_I ist in einer j -Zelle enthalten, und der Rand ${}^g A_{J,T}$ einer j -Zelle ${}^g \bar{A}_{J,T}$ besteht aus $(j-1)$ -Zellen. Die angegebene Zellenstruktur gibt \mathcal{W}_I also die Struktur eines d -dimensionalen CW-Komplexes.

Korollar 1.20. *Die \mathcal{W}_I sind zusammenhängend für alle $I \subseteq S$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass zwei Zellen des 0-Skeletts verbunden sind und dies folgt direkt aus der dritten Aussage von Lemma 1.19, wenn man als zugrundeliegende Gruppe dort M_I betrachtet. \square

Lemma 1.21. *Die Darstellung von $M_I(F)$ auf den rationalen j -Zellen von \mathcal{W}_I ist*

$$C_j(\mathcal{W}_I, \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{\substack{J \subsetneq I \\ |J|=j}} 1_{U_J N_J(F)}^{M_I(F)}.$$

Beweis. Die Zellen \bar{A}_{J, T_0} für $J \subsetneq I$ mit $|J| = j$ sind ein Repräsentantensystem der Orbits von $M_I(F)$ auf $C_j(\mathcal{W}_I, \mathbb{Q})$ und nach Lemma 1.13 (2) ist $U_J N_J(F)$ im Stabilisator der Zelle \bar{A}_{J, T_0} in \mathcal{W}_I enthalten. In der Tat ist der Stabilisator von \bar{A}_{J, T_0} bereits $U_J N_J(F)$, da $U_J T_0$ maximal in der Zelle \bar{A}_{J, T_0} ist und sie also genau dann stabilisiert wird, wenn $U_J T_0$ fixiert wird. \square

Korollar 1.22. *Die rationale Euler-Charakteristik von \mathcal{W} ist*

$$\chi(\mathcal{W}) = \sum_{I \subsetneq S} (-1)^{|I|} 1_{(U_I N_I)(F)}^{G(F)}$$

Beweis. Man hat

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{W}) &= \sum_{i=0}^d (-1)^i C_i(\mathcal{W}, \mathbb{Q}) \\ &= \sum_{i=0}^d (-1)^i \sum_{|I|=i} 1_{(U_I N_I)(F)}^{G(F)} \\ &= \sum_{I \subsetneq S} (-1)^{|I|} 1_{(U_I N_I)(F)}^{G(F)} \end{aligned}$$

\square

Man weiß, dass die Homologie $H_d(\mathcal{T}, \mathbb{Q})$ des d -dimensionalen Tits-Gebäudes $\mathcal{T}_{G(F)}$ von $G(F)$ eine Basis aus Apartments hat (siehe Satz 2.2). Diese Homologie ist die Steinberg-Darstellung von $G(F)$. Unter der Projektion $pr : \mathcal{W}_{G(F)} \rightarrow \mathcal{T}_{G(F)}$ geht ein Apartment in ein Apartment über. Das bedeutet, dass die Steinberg-Darstellung ein Quotient von $H_d(\mathcal{W}_{G(F)}, \mathbb{Q})$ ist. Dies wurde für $H_d(\mathcal{W}'_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)})$ auch in Wagoner [Wag75a] gezeigt.

1.6 Der Wagoner-Komplex von $\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_p)$

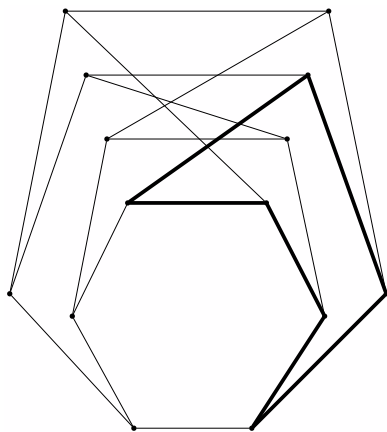
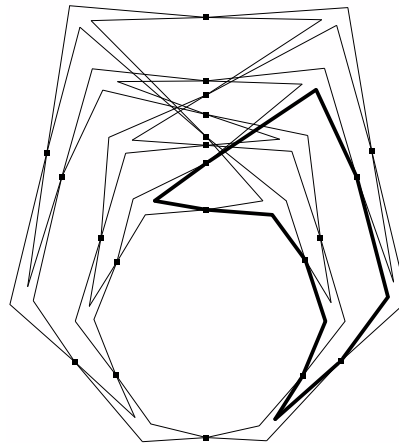
Wir betrachten zur besseren Anschauung das einfache Beispiel $G = \mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_q)$. Sei $S = \{\tau_1, \tau_2\}$, und setze $I_1 = \{\tau_1\}$ und $I_2 = \{\tau_2\}$. Wir berechnen die rationale singuläre Homologie von $\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_q)}$. Unter Verwendung von Korollar 1.22 sieht man

$$H_1(\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_2)}) \cong 1_{U_{I_2} N_{I_2}}^G + 1_{U_{I_1} N_{I_1}}^G - 1_B^G + 1_G$$

Die Dimension von $H_1(\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_2)})$ berechnet sich also zu

$$\begin{aligned} \dim H_1(\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_2)}) &= 2|G/N_{I_1} U_{I_1}| - |G/B| + 1 \\ &= q^4 + q^3 - q \end{aligned}$$

Im Fall $q = 2$ ergibt das $14 + 8 = 22$, was man in der Abbildung unten ablesen kann. Der Wagoner-Komplex hat 14 Zyklen “über den Ecken des Tits-Gebäudes” und noch 8 große Zyklen, welche die Steinberg-Darstellung erzeugen. Für diese nimmt man z.B. die 8 großen Zyklen, welche jeweils die untere dicke Ecke B enthalten und eine der B gegenüberliegenden dicken Ecken. Die Unterteilung in “lokale” und “globale” Zyklen kann man auch an der Darstellung der Homologie in Korollar 2.15 erkennen.

Tits-Gebäude von $\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_2)$ Wagoner-Komplex von $\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_2)$

Man kann an den Bildern leicht erkennen, wie die Projektion $pr : \mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_2)} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_2)}$ aussieht. Jede Verbindung zweier benachbarter dicker Ecken in dem Bild vom Wagoner-Komplex ist eine 1-Zelle in der CW-Struktur von $\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_2)}$,

und in den Abbildungen sind beispielhaft zwei korrespondierende Apartments hervorgehoben dargestellt.

Die Grafik des Tits-Gebäudes reflektiert die Wahl der Borel-Gruppe B , und man kann den Beweis des Satzes von Solomon-Tits anhand dieses Bildes nachvollziehen. Die unterste Kante in der Abbildung korrespondiert zu B , und die dieser Kante gegenüberliegenden 8 Kanten korrespondieren zu ${}^u B^-$ mit $u \in U$. Schneidet man nun die Kanten zu den ${}^u B^-$ durch, so wird der Raum kontrahierbar. Jede der zerschnittenen Kanten bestimmt ein eindeutiges Apartment, welches sowohl diese Kante, als auch die Kante zu B enthält. Man erhält hier also gerade $|U| = 8$ Apartments als Zykel, welche eine Basis der ersten Homologie sind.

Wir wollen auch noch bemerken, dass das Tits-Gebäude vollkommen symmetrisch ist. Das heißt, es gibt für jede Kante simpliziale Automorphismen des Tits-Gebäudes, die diese Kante auf eine beliebige andere Kante abbilden. Man sieht an dem Bild, in welcher Weise sich diese Symmetrie auf den Wagoner-Komplex überträgt.

2 Homologie-Darstellungen des Wagoner-Komplexes

2.1 Approximationen von \mathcal{W}

Für CW -Komplexe X bezeichne in diesem Abschnitt $H_*(X)$ die reduzierte singuläre Homologie von X mit ganzzahligen Koeffizienten. Die i -Ketten seien $C_i(X)$ und die i -Zykel $Z_i(X)$. Wollen wir Koeffizienten in \mathbb{Q} betrachten, so schreiben wir $H_*(X, \mathbb{Q})$ bzw. $C_*(X, \mathbb{Q})$ und $Z_*(X, \mathbb{Q})$. Die reduzierte Homologie unterscheidet sich nur im Grad null von der gewöhnlichen Homologie $H'_*(X)$. Es gilt dort $H_0(X) \oplus \mathbb{Z} = H'_0(X)$. Wir betrachten weiterhin eine zerfallende reductive F -Gruppe G mit einem maximalen split F -Torus T_0 und einer Borelgruppe B , die T_0 enthält. Sei Φ das Wurzelsystem bezüglich T_0 und sei Φ^+ die Menge der positiven Wurzeln bezüglich B . Sei $B^- = T \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_{-\alpha}$. Als Tits-Gebäude \mathcal{T}_I von M_I nehmen wir hier den Flaggenkomplex, der der durch umgekehrte Inklusion teilgeordneten Menge $\{{}^g U_J \mid J \subsetneq I, g \in M_I\}$ zugeordnet ist. Dies ist möglich, da für den Flaggenkomplex die Richtung der Ordnung unerheblich ist, und man nach Lemma 1.14 die unipotenten Radikale der parabolischen Untergruppen anstelle der parabolischen Untergruppen verwenden kann.

Fixiere ein $I \subseteq S$ und setze $d = |I| - 1$. Für $J \subseteq I$ bezeichne $P_J = (B \cap M_I) N_J (B \cap M_I)$ nun eine parabolische F -Untergruppe in M_I . Sei dann U_J das unipotente Radikal von P_J in M_I .

Der Komplex $\hat{\mathcal{T}}_I$ sei der Flaggenkomplex zu der semi-teilgeordneten Menge

$$\{^g U_J \mid J \subsetneq I, g \in M_I(F)\} \cup \\ \{T \mid T \text{ max. } F\text{-split } F\text{-Torus in } M_I\}$$

$$T \geq ^g U_J \Leftrightarrow T \subseteq ^g P_J \\ ^g U_J \geq ^{g'} U_{J'} \Leftrightarrow ^g U_J \subseteq ^{g'} U_{J'}$$

$\hat{\mathcal{T}}_I$ ist also der *CW*-Komplex der aus \mathcal{T}_I entsteht, wenn man in die Apartments eine $(|I|-1)$ -Zelle einhängt. Für $0 \leq i < d$ sei \mathcal{W}_I^i der Flaggenkomplex zu der semi-teilgeordneten Menge

$$\mathfrak{W}_I^i = \{^g (U_J T_0) \mid g \in M_I(F), J \subsetneq I, |J| > i\} \cup \\ \{^g U_J \mid g \in M_I(F), J \subsetneq I, |J| \leq i\}$$

mit den Relationen

$$^g (U_J T_0) \geq ^{g'} (U_{J'} T_0) \Leftrightarrow ^g (U_J T_0) \subseteq ^{g'} (U_{J'} T_0) \\ ^g U_J \geq ^{g'} U_{J'} \Leftrightarrow ^g U_J \subseteq ^{g'} U_{J'} \\ ^g (U_J T_0) \geq ^{g'} U_{J'} \Leftrightarrow ^g U_J \subseteq ^{g'} U_{J'} \text{ und } ^g T_0 \subseteq ^{g'} P_{J'},$$

und sei $\hat{\mathcal{W}}_I^i$ der Flaggenkomplex zur semi-teilgeordneten Menge

$$\hat{\mathfrak{W}}_I^i = \{^g (U_J T) \mid g \in M_I(F), J \subseteq I, |J| > i\} \cup \\ \{^g U_J \mid g \in M_I(F), J \subsetneq I, |J| \leq i\}$$

mit der analogen semi-Teilordnung wie oben. Mit Korollar 1.16 und der Tatsache, dass $U_\phi T = B$ ist für alle maximalen split F -Tori T in B , sieht man sofort, dass $\mathcal{W}_I^0 = \mathcal{W}_I$, $\mathcal{W}_I^d = \mathcal{T}_I$ und $\hat{\mathcal{W}}_I^d = \hat{\mathcal{T}}_I$. Für $|I| = 1$ gilt $\mathcal{W}_I = \mathcal{T}_I$ und $\hat{\mathcal{W}}_I = \hat{\mathcal{T}}_I$.

Ausserdem hat man für $J \subsetneq I$ wie in Abschnitt 1.5 die auf den (standard) Ecken beschriebene $M_J(F)$ -äquivalente Inklusion

$$\delta : \hat{\mathfrak{W}}_J^i \hookrightarrow \mathfrak{W}_I^i \\ T_0(U_{J'} \cap M_J) \mapsto T_0 U_{J'} \\ U_{J'} \cap M_J \mapsto U_{J'},$$

welche eine Inklusion $\delta : \hat{\mathcal{W}}_J^i \hookrightarrow \mathcal{W}_I^i$ induziert. Man beachte, dass dieser Morphismus wieder von der Wahl einer parabolischen F -Untergruppe P von M_I abhängt, welche M_J als Levi-Komponente enthält. Wir haben hier $P = P_J$ gewählt.

Ausserdem gibt es noch eine kanonische Inklusion $\mathcal{W}_I^i \rightarrow \hat{\mathcal{W}}_I^i$ und natürliche Projektionen

$$\pi : \mathcal{W}_I^i \rightarrow \mathcal{W}_I^{i+1},$$

die von den wohldefinierten M_I -äquivalenten Projektionen

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{W}_I^i &\rightarrow \mathfrak{W}_I^{i+1} \\ U_J T &\mapsto U_J \text{ für } |J| = i + 1 \text{ und sonst die Identität} \end{aligned}$$

induziert werden.

Wir wollen nun eine CW -Struktur auf den Komplexen \mathcal{W}_I^i und $\hat{\mathcal{W}}_I^i$ ermitteln. Ähnlich wie für den Wagoner-Komplex \mathcal{W}_I selbst, hat man auch für die $\hat{\mathcal{W}}_I^i$ eine $M_I(F)$ -äquivalente simpliziale Projektion

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}_I^i &\longrightarrow \hat{\mathcal{T}}_I \\ {}^g(TU_J) &\mapsto {}^gU_J \\ {}^gU_J &\mapsto {}^gU_J \\ {}^gT &\mapsto {}^gT. \end{aligned}$$

Diese induziert durch Einschränkung auch eine Projektion

$$\mathcal{W}_I^i \longrightarrow \mathcal{T}_I$$

und stimmt mit der $(d-i)$ -fachen Hintereinanderausführung von π überein. Das *Apartment* $A_{I,T}$ in \mathcal{W}_I^i für einen maximalen split F -Torus T in M_I ist nun per Definition der Unterkomplex $A_{I,T} = \langle \mathfrak{n} \in \hat{\mathfrak{W}}_I^i | T > \mathfrak{n} \rangle$. Man beachte, dass $A_{I,T}$ vermöge der kanonischen Inklusion $\mathcal{W}_I^i \hookrightarrow \hat{\mathcal{W}}_I^i$ tatsächlich in \mathcal{W}_I^i liegt. Man sieht, dass $A_{I,T}$, ähnlich wie in Lemma 1.19, unter obiger Projektion homöomorph auf das Apartment in \mathcal{T}_I abgebildet wird, welches zu dem Torus T korrespondiert. $A_{I,T}$ ist also auch eine d -Sphäre. Man beachte auch den leichten Unterschied in den durch $A_{I,T}$ bezeichneten Objekten in Abschnitt 1.5 und hier.

Diese Definition verträgt sich im Fall $i = 0$ offensichtlich mit der Definition 1.18. Im Fall $i = d$ sind die hier definierten Apartments auch die üblichen Apartments des Tits-Gebäudes. Die Unterkomplexe $\bar{A}_{I,T} = \langle \mathfrak{n} \in \hat{\mathfrak{W}}_I^i | T \geq \mathfrak{n} \rangle$ von $\hat{\mathcal{W}}_I^i$ für maximale split F -Tori T in M_I sind $|I|$ -Zellen. Für $J \subsetneq I$ mit $|J| > i$ hat man entsprechend $|J|$ -Zellen $\bar{A}_{J,T} = \langle \mathfrak{n} \in \hat{\mathfrak{W}}_I^i | T \geq \mathfrak{n} \rangle$. Die Menge der j -Zellen von $\hat{\mathcal{W}}_I^i$ mit $j > i$ sei dann die Menge

$$C_j(\hat{\mathcal{W}}_I^i) = \bigcup_{|J|=j} \{ {}^g\delta(\bar{A}_{J,T_0}) | g \in M_I(F) \}.$$

Für $j \leq i$ sei $C_j(\hat{\mathcal{W}}_I^i)$ die Menge der j -Simplizes in dem Unterkomplex $\langle {}^gU_J | g \in M_I, |J| \leq j \rangle$ von $\hat{\mathcal{W}}_I^i$. Es gilt

$${}^g\delta(\bar{A}_{J,T}) = \langle \mathfrak{w} \in \hat{\mathfrak{W}}_I^i | {}^g(U_J T) \geq \mathfrak{w} \rangle.$$

Man prüft leicht nach, dass jedes j -Simplex von $\hat{\mathcal{W}}_I^i$ in einer j -Zelle enthalten ist, und dass der Rand ${}^g\delta(A_{J,T})$ einer j -Zelle ${}^g\delta(\bar{A}_{J,T})$ aus $(j-1)$ -Zellen besteht. Die angegebene Zellenstruktur ist also eine CW -Struktur auf $\hat{\mathcal{W}}_I^i$. Es ist nun klar, dass \mathcal{W}_I^i als d -Skelett in $\hat{\mathcal{W}}_I^i$ bezüglich dieser CW -Struktur eingebettet ist und damit auch eine CW -Struktur erhält. Für $i=0$ ergibt sich so für \mathcal{W}_I dieselbe CW -Struktur, wie sie in Abschnitt 1.5 angegeben wurde, und für $i=d$ erhält man die simpliziale Struktur des Tits-Gebäudes \mathcal{T}_I als CW -Struktur.

Durch Einfügen von 2-Zellen in die Apartments von $\mathcal{W}_{\text{Sl}_3(\mathbb{F}_2)}$ entsteht gemäß Definition $\hat{\mathcal{W}}_{\text{Sl}_3(\mathbb{F}_2)}$. Man kann also anhand der Abbildung auf Seite 21 nachvollziehen, welche Gestalt $\hat{\mathcal{W}}_{\text{Sl}_3(\mathbb{F}_2)}$ hat und insbesondere auch, welche Gestalt $\mathcal{W}_{\text{Sl}_4(\mathbb{F}_2)}$ lokal hat.

2.2 Eine lange exakte Homologie-Sequenz

Man hat $\hat{\mathcal{W}}_J^i = \hat{\mathcal{T}}_J$ für $|J| = i+1$, und wenn i aus dem Kontext hervorgeht schreiben wir abkürzend

$$\coprod {}^g\hat{\mathcal{T}}_J = \coprod_{\substack{|J|=i+1, J \subseteq I \\ g \in M_I(F)/P_J(F)}} \dot{g}\hat{\mathcal{W}}_J^i,$$

wobei \dot{g} ein beliebiger Repräsentant von g in $M_I(F)$ sei.

Der Abbildungszylinder einer stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ von topologischen Räumen ist der Raum $X \times [0,1] \cup Y/(x,0) \sim f(x)$. Ist $A \subseteq X$ ein Unterraum, so sei $X//A$ der Raum X/\sim , wobei $x \sim y$, wenn x und y in einer gemeinsamen Zusammenhangskomponente von A liegen. Sei Z_I^i der Abbildungszylinder von

$$\coprod \dot{g}\delta: \coprod {}^g\hat{\mathcal{T}}_J \rightarrow \mathcal{W}_I^i.$$

Man beachte, dass die Einbettung $\dot{g}\delta$ von der Wahl des Repräsentanten von g abhängt. Man hat durch Konjugation eine $M_I(F)$ -Operation auf $\coprod {}^g\hat{\mathcal{T}}_J$ und $\coprod \dot{g}\delta$ ist diesbezüglich äquivariant.

Proposition 2.1. *Für $0 \leq i < d$ gilt $\mathcal{W}_I^{i+1} \cong Z_I^i // \coprod ({}^g\hat{\mathcal{T}}_J \times 1)$.*

Beweis. Nach Konstruktion ist $Z_I^i // \coprod ({}^g\hat{\mathcal{T}}_J \times 1)$ als Flaggenkomplex der semi-teilgeordneten Menge

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{W}_I^i \cup \bigcup_{\substack{|J|=i+1, J \subseteq I \\ g \in M_I(F)/P_J(F)}} \{\dot{g}U_J\}$$

gegeben, wenn man die semi-Teilordnung durch ${}^g U_J \geq E$ fortsetzt für alle $E \in \delta^g(\hat{\mathfrak{W}}^i)$ mit $|J| = i + 1$. Sei $\mathfrak{N}_J = \{{}^g TU_J \mid g \in P_J(F)\} \cup \{U_J\}$. Wir wollen zeigen, dass \mathfrak{N}_J im Sinne von Definition 1.3 zulässig in \mathfrak{M} ist. Die erste Bedingung ist erfüllt, da es kein Element in $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}_J$ gibt, das zwischen zwei Elementen aus \mathfrak{N}_J liegt. Ein Element ${}^g TU_J$ aus \mathfrak{N}_J kann höchstens zwischen zwei Elementen ${}^{g'} U_{J'}$ und ${}^{g''}(TU_{J''})$ aus $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}_J$ liegen mit $|J'| < i + 1$ und $|J''| > i + 1$. Ist ${}^g TU_J < {}^{g''}(TU_{J''})$, so folgt ${}^{g''}T \subseteq {}^g TU_J$ und daher ${}^g TU_J = {}^{g''} TU_J$. Ist ${}^{g'} U_{J'} < {}^g TU_J$, dann ist $U_J \subsetneq {}^{g'} U_{J'}$. Hat man nun auch ${}^{g'} U_{J'} < {}^{g''}(TU_{J''})$, so folgt ${}^{g''}T \subseteq {}^{g'} P_{J'}$. Es gilt also $U_J \subsetneq {}^{g'} U_{J'}$ und ${}^{g''}T \subseteq {}^{g'} P_{J'}$, was gleichbedeutend mit ${}^{g'} U_{J'} < {}^g TU_J$ ist. Die Menge \mathfrak{N}_J ist also zulässig in \mathfrak{M} .

Der Raum $\Delta(\mathfrak{N}_J)$ ist kontrahierbar, da er zusammenhängend ist und \mathfrak{N}_J das Maximum U_J hat. Sei nun Σ eine Flagge in \mathfrak{M} , welche sowohl ein Element \mathfrak{n} aus \mathfrak{N}_J , als auch ein weiteres Element enthält, das größer als \mathfrak{n} ist. Wie wir bereits oben gesehen haben, ist \mathfrak{n} dann schon eindeutig bestimmt. Es folgt $\Sigma_{\mathfrak{N}_J} \cap \Delta(\mathfrak{N}_J)$ ist kontrahierbar. Es genügt nun Flaggen Σ in \mathfrak{M} zu betrachten, die ein Element \mathfrak{n} aus \mathfrak{N}_J enthalten und deren übrigen Elemente alle kleiner als \mathfrak{n} sind. Diese Elemente liegen dann alle in $\delta(\mathfrak{W}^i) \cup \{U_J\}$, und $\Sigma_{\mathfrak{N}_J} \cap \Delta(\mathfrak{N}_J)$ enthält daher U_J und ist zusammenhängend. Dann ist $\Sigma_{\mathfrak{N}_J} \cap \Delta(\mathfrak{N}_J)$ kontrahierbar. Genauso ist für alle $g \in M_I(F)/P_J(F)$ und $J \subsetneq I$ mit $|J| = i + 1$ auch ${}^g \mathfrak{N}_J$ zulässig in \mathfrak{M} und $\Sigma_{{}^g \mathfrak{N}_J} \cap \Delta({}^g \mathfrak{N}_J)$ kontrahierbar.

Da es für verschiedene Mengen ${}^g \mathfrak{N}_J$ und ${}^h \mathfrak{N}_{J'}$ mit $g, h \in M_I(F)$ und $J, J' \subsetneq I$ keine Relationen zwischen ihren Elementen gibt, bilden die ${}^g \mathfrak{N}_J$ für $g \in M_I(F)$ und $J \subseteq I$ mit $|J| = i + 1$ ein diskretes System $\tilde{\mathfrak{N}}$ von zulässigen Teilmengen von \mathfrak{M} . Wir können daher Lemma 1.4 darauf anwenden und erhalten eine Homotopieäquivalenz von $Z_I^i // \prod {}^g \hat{T}_J \times 1$ und dem Flaggenkomplex der semi-teilgeordneten Menge $\mathfrak{M} // \tilde{\mathfrak{N}}$. Für die Elemente ${}^g \mathfrak{N}_J$ in $\mathfrak{M} // \tilde{\mathfrak{N}}$ können wir auch ${}^g U_J$ schreiben. Es ist klar, dass $\mathfrak{M} // \tilde{\mathfrak{N}}$ als Menge in Bijektion zu $\hat{\mathfrak{W}}_I^{i+1}$ steht.

Die semi-Teilordnung auf $\mathfrak{M} // \tilde{\mathfrak{N}}$ ist bei ${}^g U_J$ mit $|J| = i + 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} {}^g U_J > {}^h U_{J'} &\Leftrightarrow \exists T \subseteq {}^g P_J \text{ Torus mit } {}^g U_J T > {}^h U_{J'} \text{ in } \hat{\mathfrak{W}}_I^i \\ {}^h U_{J'} T > {}^g U_J &\Leftrightarrow \exists T' \subseteq {}^g P_J \text{ Torus mit } {}^h U_{J'} T' > {}^g U_J T' \text{ in } \hat{\mathfrak{W}}_I^i \end{aligned}$$

und sonst wie auf $\hat{\mathfrak{W}}_I^i$. Wir weisen nun nach, dass dies die semi-Teilordnung auf $\hat{\mathfrak{W}}_I^{i+1}$ ist, können uns aber durch Konjugation auf den Fall $g = 1$ beschränken. Sei also $U_J > {}^h U_{J'}$. Dann folgt gleich $U_J \subseteq {}^h U_{J'}$. Ist dagegen $U_J \subseteq {}^h U_{J'}$, dann ist nach Lemma 1.14 ${}^h P_{J'} \subseteq P_J$, und mit einem maximalen split F -Torus $T \subseteq {}^h P_{J'} \subseteq P_J$ ist $U_J T > {}^h U_{J'}$ in $\hat{\mathfrak{W}}_I^i$. Es ist also $U_J > {}^h U_{J'}$ äquivalent zu $U_J > {}^h U_{J'}$. Für den zweiten Fall sei ${}^h(TU_{J'}) > U_J$. Dann gibt es einen maximalen split F -Torus T mit ${}^h(TU_{J'}) \subseteq TU_J$. Es folgt ${}^h T \subseteq U_J T \subseteq P_J$ und ${}^h U_{J'} \subsetneq U_J$. Ist andererseits ${}^h T \subseteq P_J$ und ${}^h U_{J'} \subsetneq U_J$, dann folgt ${}^h(U_{J'} T) \subseteq U_J {}^h T$ und damit ${}^h(U_{J'} T) > {}^h(U_J T)$ und dann

$h(TU_{I'}) \succ hU_J = U_J$. Man hat also auch hier $h(TU_{I'}) \succ hU_J \Leftrightarrow hU_{I'} \subseteq U_J$ und $hT \subseteq P_J$. Die Ordnungsrelationen mit gU_J sind also in $\mathfrak{M}/\tilde{\mathfrak{N}}$ dieselben, wie in $\tilde{\mathfrak{W}}_I^{i+1}$. Die anderen Relationen übertragen sich eins zu eins, und wir erhalten $\mathfrak{M}/\tilde{\mathfrak{N}} \cong \tilde{\mathfrak{W}}_I^{i+1}$ als semi-teilgeordnete Mengen. \square

Für alle $i = 0, \dots, d$ sind die \mathcal{W}_I^i wegen Korollar 1.20 und der Projektion π zusammenhängend. Es sei κ als diskreter Raum die Menge der Zusammenhangskomponenten von $\coprod {}^g\hat{T}_J \times 1$. Für $j \geq 1$ hat man exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow H_j(Z_I^i / \coprod ({}^g\hat{T}_J \times 1)) \rightarrow H_j(Z_I^i / \coprod ({}^g\hat{T}_J \times 1)) \rightarrow H_{j-1}(\kappa) \rightarrow 0 .$$

Für $j > 1$ ist also

$$H_j(\mathcal{W}_I^{i+1}) = H_j(Z_I^i / \coprod ({}^g\hat{T}_J \times 1)) .$$

Für $j = 1$ hat man $H_1(Z_I^i / (\coprod {}^g\hat{T}_J \times 1)) = H_1(\mathcal{W}_I^{i+1}) \oplus H_0(\kappa)$. Weil Z_I^i ein Abbildungszylinder über \mathcal{W}_I^i ist, gilt $H_j(Z_I^i) = H_j(\mathcal{W}_I^i)$. Für $0 \leq i < d$ und $j \geq 1$ ergibt sich die lange, exakte, relative Homologiesequenz

$$\dots \rightarrow H_j(\coprod {}^g\hat{T}_J) \rightarrow H_j(\mathcal{W}_I^i) \rightarrow H_j(\mathcal{W}_I^{i+1}) \rightarrow \dots$$

(*)

$$\dots \rightarrow H_1(\mathcal{W}_I^i) \rightarrow H_1(\mathcal{W}_I^{i+1}) \rightarrow 0 .$$

Diese Sequenz ist auch M_I -äquivariant, da die Morphismen von der M_I -äquivarianten Einbettung $\Pi^g\delta$, beziehungsweise von der M_I -äquivarianten Projektion $\pi : \mathcal{W}_I^i \rightarrow \mathcal{W}_I^{i+1}$ induziert werden.

Satz 2.2. (*Solomon-Tits*) Die reduzierte Homologie des Tits-Gebäudes \mathcal{T}_I ist $H_d(\mathcal{T}_I) \cong \mathbb{Z}[U]$ und $H_i(\mathcal{T}_I) = 0$ für $0 \leq i < d$. Der Raum $H_d(\mathcal{T}_I)$ wird von den Homologieklassen der Apartments erzeugt.

Beweis. Für endliche Körper siehe Solomon [Sol69] oder auch Curtis-Lehrer [CL82b] oder Chao Ku [Cha98]. Ein besonders eleganter Beweis für das Verschwinden der Homologie im Grad ungleich d mit Methoden von Folkman findet sich in Lusztig [Lus74]. Für beliebige Körper gibt es Beweise in Quillen [Qui75] und Garland [Gar73]. \square

Definition 2.3. Die Darstellung $H_d(\mathcal{T}_I, \mathbb{Q})$ von $M_I(F)$ ist die *Steinberg-Darstellung* von $M_I(F)$ und wird mit $St_{M_I(F)}$ oder auch St_{M_I} oder St_I bezeichnet, falls der Körper F fixiert ist.

Lemma 2.4. Die reduzierte Homologie von $\hat{\mathcal{T}}_I$ ist $H_j(\hat{\mathcal{T}}_I) = 0$ für $0 \leq j < |I|$ und $H_{|I|}(\hat{\mathcal{T}}_I, \mathbb{Q}) = 1_{N_I(F)}^{M_I(F)} - St_I$.

Beweis. Nach Konstruktion ist \mathcal{T}_I das d -Skelett von $\hat{\mathcal{T}}_I$. Man hat also die lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_{|I|}(\hat{\mathcal{T}}_I) \rightarrow H_{|I|}(\hat{\mathcal{T}}_I/\mathcal{T}_I) \rightarrow H_{|I|-1}(\mathcal{T}_I) \rightarrow H_{|I|-1}(\hat{\mathcal{T}}_I) \rightarrow \dots$$

In $H_d(\mathcal{T}_I)$ ist ein Erzeugendensystem durch Apartments gegeben, und diese werden nach Konstruktion im rechten Morphismus gerade auf Null geschickt. Nun gilt noch $H_{d-1}(\hat{\mathcal{T}}_I/\mathcal{T}_I, \mathbb{Q}) = C_{d-1}(\hat{\mathcal{T}}_I, \mathbb{Q}) = 1_{N_I(F)}^{M_I(F)}$. Das Verschwinden der mittleren Homologie folgt aus der Betrachtung der niedrigeren Terme der obigen langen exakten Sequenz. \square

Sei $Sk_i^*(\mathcal{T}_I)$ der Unterkomplex von \mathcal{T}_I , der von den Ecken $\mathfrak{E}_i^* = \{gU_J \mid g \in M_I(F), J \subsetneq I, |J| \leq i\}$ aufgespannt wird. Es sei daran erinnert, dass \mathcal{T}_I die baryzentrische Unterteilung, also der Flaggenkomplex über den üblichen Simplizes $\{gU_J\}$ des Tits-Gebäudes ist. Der Raum $Sk_i^*(\mathcal{T}_I)$ ist i -dimensional.

Proposition 2.5. *Die Homologie von $Sk_i^*(\mathcal{T}_I)$ ist $H_j(Sk_i^*(\mathcal{T}_I)) = 0$ für $0 \leq j < i \leq d$ und*

$$H_i(Sk_i^*(\mathcal{T}_I), \mathbb{Q}) = \sum_{|J| > i} (-1)^{|J|-i-1} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} St_J$$

für $0 \leq i \leq d$.

Beweis. Man kann für ein $J \subseteq I$ mit $|J| = i+1$ das Gebäude \mathcal{T}_J auf folgende Weise in $Sk_i^*(\mathcal{T}_I)$ einbetten: Für eine Ecke $gU_{J'} \cap M_J$ in \mathcal{T}_J ist $|J'| \leq i$, und sie wird auf $gU_{J'}$ innerhalb von $Sk_i^*(\mathcal{T}_I)$ geschickt. Man erhält auf diese Weise eine Abbildung

$$\coprod_{\substack{|J|=i+1, J \subseteq I \\ g \in M_I(F)/P_J(F)}} \dot{g}\mathcal{T}_J \longrightarrow Sk_i^*(\mathcal{T}_I),$$

und wir betrachten, ähnlich wie oben, wieder den Abbildungszyylinder Z_i dieser Abbildung und betten $\coprod^g \mathcal{T}_J \times 1$ dort hinein ein. Dann gilt

$$Sk_{i+1}^*(\mathcal{T}_I) \cong Z_i // \coprod^g \mathcal{T}_J \times 1,$$

da $Z_i // \coprod^g \mathcal{T}_J \times 1$ nach Konstruktion der Flaggenkomplex der semi-teilgeordneten Menge

$$\mathfrak{E}_i^* \cup \bigcup_{\substack{|J|=i+1, J \subseteq I \\ g \in M_I(F)/P_J(F)}} \{gU_J\}$$

ist, wenn man die semi-Teilordnung durch $gU_J > E$ für alle $E \in \dot{g}\delta(\mathfrak{T}_J)$ mit $|J| = i+1$ fortsetzt. Die Kegelspitzen von $Z_i // \coprod^g \mathcal{T}_J \times 1$ entsprechen

dann gerade den Ecken ${}^g U_J$ mit $|J| = i + 1$. Genau wie oben erhält man für $0 \leq i \leq d$ wieder eine lange, exakte relative Homologie-Sequenz

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_j(\coprod^g \mathcal{T}_J) \rightarrow H_j(\text{Sk}_i^*(\mathcal{T}_I)) \rightarrow H_j(\text{Sk}_{i+1}^*(\mathcal{T}_I)) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_1(\text{Sk}_{i+1}^*(\mathcal{T}_I)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Wegen Satz 2.2 hat man $H_j(\text{Sk}_i^*(\mathcal{T}_I)) = H_j(\text{Sk}_{i+1}^*(\mathcal{T}_I))$ für $0 \leq j < i < d$. Wir lassen das i wachsen und sehen $H_j(\text{Sk}_i^*(\mathcal{T}_I)) = H_j(\mathcal{T}_I) = 0$ für diese $0 \leq j < i < d$, aber auch für $i = d$.

Für $j = i+1$ ist $H_{i+1}(\coprod^g \mathcal{T}_J) = \sum_{|J|=i+1} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} St_J$ und $H_j(\coprod^g \mathcal{T}_J) = 0$. Mit der obigen Sequenz erhält man die Formel

$$H_{i+1}(\text{Sk}_{i+1}^*(\mathcal{T}_I)) + H_i(\text{Sk}_i^*(\mathcal{T}_I)) = \sum_{|J|=i+1} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} St_J.$$

Jetzt beweist man mittels absteigender Induktion nach i die Behauptung $H_i(\text{Sk}_i^*(\mathcal{T}_I)) = \sum_{|J|>i} (-1)^{|J|-i-1} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} St_J$. \square

Korollar 2.6. *Es gilt $1_{M_I} = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} St_J$.*

Beweis. Nach Konstruktion ist die 0-te reduzierte Homologie $H_0(\text{Sk}_0^*(\mathcal{T})) = 1_B^{M_I} - 1_M$. Man verwendet nun Proposition 2.5 für $H_0(\text{Sk}_0^*(\mathcal{T}))$ und erhält die Aussage. Man kann den Beweis auch durch eine direkte Berechnung mit den bekannten Formeln $St_J = \sum_{L \subseteq J} (-1)^{|L|} 1_{P_L \cap M_J}^{M_J}$ führen. \square

Lemma 2.7. *Es gilt $H_j(\mathcal{W}_I^j) = 0$ für $1 \leq j < d$.*

Beweis. Für $i = j$ hat die exakte Sequenz (*) die Gestalt

$$\cdots \rightarrow H_j(\coprod^g \hat{\mathcal{T}}_J) \rightarrow H_j(\mathcal{W}_I^j) \rightarrow H_j(\mathcal{W}_I^{j+1}) \rightarrow \cdots$$

Aus den Definitionen folgt unmittelbar $\text{Sk}_{j+1}(\mathcal{W}_I^{j+1}) = \text{Sk}_{j+1}^*(\mathcal{T}_I)$. Also folgt mit obigem Lemma $H_j(\mathcal{W}_I^{j+1}) = 0$. Lemma 2.4 besagt $H_j(\hat{\mathcal{T}}_J) = 0$ für $j = |J| - 1$, so dass dann auch $H_j(\mathcal{W}_I^j) = 0$ für $1 \leq j < d$. \square

Zusammen mit Lemma 2.4 und Lemma 2.7 extrahieren wir aus der Sequenz (*) nun folgende Aussagen.

Proposition 2.8. *Für $1 \leq j < d$ hat man Surjektionen*

$$H_j\left(\coprod_{\substack{|J|=j, J \subseteq I \\ g \in M_I(F)/\hat{P}_J(F)}} \hat{\mathcal{T}}_J\right) \longrightarrow H_j(\mathcal{W}_I^{j-1}).$$

Für $1 \leq j \leq d$ gilt $H_j(\mathcal{W}_I) = H_j(\mathcal{W}_I^{j-2})$, und außerdem hat man

$$H_d(\mathcal{W}_I^{d-1}, \mathbb{Q}) = St_I + \sum_{\substack{J \subsetneq I \\ |J|=d}} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} H_d(\hat{\mathcal{T}}_J, \mathbb{Q}) .$$

Beweis. Die Surjektion erhält man unmittelbar aus Lemma 2.7 und der Sequenz (*) mit $i = j - 1$. Lemma 2.4 und die Sequenz zeigen auch, dass $H_j(\mathcal{W}_I^{i-2}) \cong H_j(\mathcal{W}_I^{i-1})$ für alle $i < j \leq d$. Es folgt $H_j(\mathcal{W}_I) = H_j(\mathcal{W}_I^{j-2})$. Für die letzte Identität setzt man $\mathcal{W}_I^d = \mathcal{T}_I$ in die Sequenz für $i = d - 1$ ein. Der Term $H_{d-1}(\coprod^g \hat{\mathcal{T}}_J)$ ist null nach Lemma 2.4 und auch $H_{d+1}(\mathcal{T}_I) = 0$. Der Stabilisator von $\hat{\mathcal{T}}_J$ in $M_I(F)$ ist $P_J(F)$, und die $J \subsetneq I$ mit $|J| = d$ sind ein Repräsentantensystem der Orbits der ${}^g \hat{\mathcal{T}}_J$ unter $M_I(F)$. Daher erhält man die Formel für $H_d(\mathcal{W}_I^{d-1}, \mathbb{Q})$. (vgl. Abschnitt 1.1) \square

Die Surjektion in der Proposition bedeutet, dass es in der Homologie $H_j(\mathcal{W}_I^{j-1})$ keine "globalen" Homologieklassen gibt. Für $1 \leq j < d$ hat die Sequenz (*) mit $i = j - 1$ die Form

$$0 \rightarrow H_{j+1}(\mathcal{W}_I) \rightarrow H_{j+1}(\mathcal{W}_I^j) \rightarrow H_j(\coprod^g \hat{\mathcal{T}}_J) \rightarrow H_j(\mathcal{W}_I^{j-1}) \rightarrow 0,$$

wenn wir den Term $H_{j+1}(\mathcal{W}_I^{j-1})$ mit Hilfe der zweiten Aussage obiger Proposition durch $H_{j+1}(\mathcal{W}_I)$ ersetzen. Die Bestimmung der Homologie-Darstellungen von \mathcal{W}_I reduziert sich also zu einem grossen Teil zu der Bestimmung der $H_i(\mathcal{W}_I^{i-1})$.

Proposition 2.9. *Für $|I| > 1$ berechnet sich die rationale Euler-Charakteristik von \mathcal{W}_I zu*

$$\chi(\mathcal{W}_I) = 1_{M_I(F)} + (-1)^d St_I + \sum_{\phi \neq J \subsetneq I} (-1)^{|J|} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} H_{|J|}(\hat{\mathcal{T}}_J, \mathbb{Q}) .$$

Beweis. In diesem Beweis betrachten wir reduzierte Homologie mit rationalen Koeffizienten. Man erhält dann für $1 \leq j < d$ mit der Sequenz, die in der Bemerkung vor dieser Proposition auftaucht

$$H_j(\mathcal{W}_I^{j-1}) = \sum_{|J|=j} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} H_j(\hat{\mathcal{T}}_J) - H_{j+1}(\mathcal{W}_I^j) + H_{j+1}(\mathcal{W}_I)$$

als virtuelle Darstellung von $M_I(F)$. Durch Induktion nach j beweisen wir für $j \leq d$ die Formel

$$\sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} H_i(\mathcal{W}_I) = H_j(\mathcal{W}_I^{j-1}) + \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{j-i} \sum_{|J|=i} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} H_i(\hat{\mathcal{T}}_J) .$$

Für $j = 1$ hat man bereits

$$H_2(\mathcal{W}_I) - H_1(\mathcal{W}_I) = H_2(\mathcal{W}_I^1) - \sum_{|J|=1} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} H_1(\hat{\mathcal{T}}_J).$$

Das Einsetzen der Formel für $H_j(\mathcal{W}_I^{j-1})$ in die Induktionsvoraussetzung vollzieht den Induktionsschritt. Es gilt also nach Erweiterung auf den Fall $i = 0$ auf der linken Seite

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^d (-1)^{d-i} H_i(\mathcal{W}_I) &= (-1)^d 1_{M_I(F)} + H_d(\mathcal{W}_I^{d-1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{d-i} \sum_{|J|=i} \text{ind}_{P_J(F)}^{M_I(F)} H_i(\hat{\mathcal{T}}_J). \end{aligned}$$

Schließlich kommt Proposition 2.8 für den Term $H_d(\mathcal{W}_I^{d-1})$ zur Anwendung, und nach Multiplikation der Gleichung mit $(-1)^d$ folgt die Behauptung. \square

Unter Verwendung von Lemma 2.4 und Korollar 2.6 ist es nicht schwer diese Beschreibung der Euler-Charakteristik in diejenige von Korollar 1.22 zu überführen.

2.3 Homotopien im Wagoner-Komplex

Wir beschränken uns nun auf den Fall $G = \text{Sl}_n(k)$. Wir fixieren die F -Borel-Gruppe B der oberen Dreiecksmatrizen und den maximalen split F -Torus T_0 bestehend aus den Diagonalmatrizen. Für $J \subseteq I$ führen wir die Notation $P_{J,I} = P_J \cap M_I$ und $U_{J,I} = U_J \cap M_I$ ein. Außerdem sei noch $B_I = B \cap M_I$ und $U_\phi = R_u(B)$.

Sei Φ_I das Wurzelsystem von M_I bezüglich T_0 und seien Φ_I^+ die positiven Wurzeln bezüglich der F -Borel-Gruppe B_I in M_I . Für eine Wurzel $\alpha \in \Phi_I$ sei $U_{\alpha,I}$ die zugehörige Wurzelgruppe in M_I . Ist nun für die Teilmenge $R_{J,I} = \Phi_I^+ - \Phi_J^+$ das unipotente Radikal $U_{J,I} = \prod_{\alpha \in R_{J,I}} U_{\alpha,I}$, so sei $U_{J,I}^- = \prod_{\alpha \in R_{J,I}} U_{-\alpha,I}$.

Falls zwei parabolische Untergruppen P und P' von M_I eine gemeinsame Levi-Untergruppe enthalten, sagen wir, dass P und P' *gegenüberliegend* sind. Ein $I \subseteq S$ heiße *zusammenhängend*, wenn es von der Form $I = \{\tau_i, \dots, \tau_{i+m}\}$ ist, für ein $1 \leq i \leq d$ und ein $m \geq 0$. Für $J \subseteq I$ führen wir noch die Notation $U_{J,I}^\pm$ für die Gruppe $\langle U_{J,I}, U_{J,I}^- \rangle$ ein.

Lemma 2.10. *Ist $J \subsetneq I \subseteq S$ und ist I zusammenhängend, dann ist $U_{J,I}^\pm = U_{\phi,I}^\pm$, und $U_{\phi,I}^\pm$ enthält ein Repräsentantensystem von W_I . Außerdem ist $U_{\phi,I}^\pm$ normal in M_I , und es gilt $U_{\phi,I}^\pm T_0 = M_I$.*

Beweis. Bezeichne die Elementarmatrix, welche auf der Diagonalen und an der Stelle (i, j) den Eintrag Eins hat, mit $e_{i,j}$. Sei außerdem $\tau_{i,j}$ die Matrix, welche aus der Einheitsmatrix durch Negieren der j -ten Spalte und anschließendem Vertauschen der i -ten und j -ten Spalte entsteht. Man vollzieht elementar nach, dass mit $e_{i,j}$ und $e_{j,i}$ auch $\tau_{i,j} = e_{i,j}e_{j,i}^{-1}e_{i,j}^{-1}$ in $U_{J,I}^\pm$ enthalten ist. Da $J \subsetneq I$ ist, gibt es ein $\lambda \in I - J$ mit $e_{\lambda,\lambda+1} \in U_{J,I}$. Dann liegen, da I zusammenhängend ist auch $e_{i,\lambda+1}$ und $e_{\lambda,j}$ in $U_{J,I}$ für alle $\min(I) \leq i \leq \lambda$ und $\lambda < j \leq \max(I)$. Hierbei betrachten wir die natürliche Ordnung auf I . Man hat dann

$$\langle \tau_{i,\lambda+1}, \tau_{\lambda,j} \mid \min(I) \leq i \leq \lambda \text{ und } \lambda < j \leq \max(I) \rangle \subseteq U_{J,I}^\pm.$$

Man sieht leicht, dass die Gruppe auf der linken Seite gerade W_I ist. Daher ist $U_{J,I}^\pm = U_{\phi,I}^\pm$.

Sei nach Bruhat-Zerlegung $g = wtu' \in M_I$ mit $u, u' \in U_{\phi,I}$, $t \in T_0$ und $w \in N_I \cap U_{\phi,I}^\pm$. Dann ist für x in $U_{\phi,I}$ oder $U_{\phi,I}^-$ auch ${}^g x$ in $U_{\phi,I}^\pm$ enthalten. $U_{\phi,I}^\pm$ ist also normal in M_I . Es ist $U_{\phi,I}$ und N_I in $U_{\phi,I}^\pm T_0$ enthalten. Nach der Bruhat-Zerlegung ist dann $U_{\phi,I}^\pm T_0 = M_I$. \square

Sei nun $I \subseteq S$ von der Form $I = \{\tau_i, \tau_j\}$ für $i, j \in \{1, \dots, n-2\}$. Sei w_0 das längste Element in $\langle I \rangle$, also $w_0 = \tau_i \tau_j \tau_i$ falls I zusammenhängend ist und sonst $w_0 = \tau_i \tau_j$. Sei $J = \{\tau_i\}$ und $J' = \{\tau_j\}$, dann ist $U_{J,I}^- = {}^{w_0} U_{J',I}$. Die Gruppen $P_{J,I}$ und ${}^{w_0} P_{J',I}$ enthalten die gemeinsame F -Levi-Untergruppe M_J . Man hat zwei M_J -äquivalente Einbettungen

$$\begin{aligned} \delta : \hat{T}_J &\rightarrow \hat{W}_I \\ T &\mapsto TU_{J,I} \\ {}^p U_{\phi,J} &\mapsto {}^p U_{\phi,J} U_{J,I} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \delta^- : \hat{T}_J &\rightarrow \hat{W}_I \\ T &\mapsto TU_{J,I}^- \\ {}^p U_{\phi,J} &\mapsto {}^p U_{\phi,J} U_{J,I}^- \end{aligned}$$

Hierbei ist $p \in M_J(F)$.

Proposition 2.11. *Die Einbettungen δ und δ^- sind homotop.*

Beweis. Wir assoziieren zu $U_{\phi,J}$ einen eindimensionalen Unterkomplex $Z(U_{\phi,J})$ von \hat{W}_I . Dieser sei von den Ecken $E \in \hat{\mathfrak{M}}_I$ erzeugt, für die $E < T'$ in $\hat{\mathfrak{M}}_I$ für alle maximalen split F -Tori $T' \subseteq B_J$ gilt. Dies sind gerade die Zellen im Schnitt der Apartments, welche den maximalen split F -Tori in B_J zugeordnet sind. Ist I zusammenhängend, so rechnet man elementar nach, dass

$Z(U_{\phi,J})$ der Komplex ist, welcher durch die Ecken erzeugt wird, deren zugehörige Gruppen durch folgende Matrizen symbolisiert werden.

$$\begin{aligned} \delta(U_{\phi,J}) \hat{=} & \begin{pmatrix} 1 & u & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} t & u & x \\ 0 & t' & 0 \\ 0 & 0 & t'' \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & u & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} \\ & < \begin{pmatrix} t & u & 0 \\ 0 & t' & 0 \\ 0 & x & t'' \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \delta^-(U_{\phi,J}) \end{aligned}$$

Falls I nicht zusammenhängend ist, besteht $Z(U_{\phi,J})$ aus den Simplizes symbolisiert durch

$$\delta(U_{\phi,J}) \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & u & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & x & & \\ & & 0 & 1 & & \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} t & u & & & & \\ 0 & t' & & & & \\ & & t'' & 0 & & \\ & & 0 & t''' & & \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & u & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & x & 1 & & \end{pmatrix} \hat{=} \delta^-(U_{\phi,J}).$$

Der obere linke Block steht hier für M_J , und $t, t', t'', t''' \in F^*$ und $u, x, y \in F$. In jedem Fall ist $Z(U_{\phi,J})$ also kontrahierbar. Man sieht auch, dass ${}^pZ(U_{\phi,J}) \cap Z(U_{\phi,J}) = \phi$ äquivalent ist zu ${}^pU_{\phi,J} \neq U_{\phi,J}$ für alle $p \in M_J(F)$.

Sei \mathcal{Z} der Unterkomplex von $\hat{\mathcal{W}}_I$ bestehend aus den ${}^pZ(U_{\phi,J})$ und den Zellen ${}^p[T_0]$ für $p \in M_J(F)$, wobei die Zelle $\delta(A_{T,I})$ zu T mit $[T]$ bezeichnet wird.

Jeder maximale split F -Torus $T \in P_{J,I}$ ist in genau einer F -Levi-Untergruppe von $P_{J,I}$ enthalten. In einer F -Levi-Untergruppe M sind keine zwei maximalen F -Tori durch ein $u \in U_{J,I}(F)$ konjugiert, denn sonst wäre ${}^uT \subseteq M, {}^uM$. Man weiß aber, dass $U_{J,I}(F)$ einfach transitiv auf der Menge der F -Levi-Untergruppen von $P_{J,I}$ operiert. Es gibt also einen eindeutigen maximalen split F -Torus \hat{T} in $TU_{J,I}$, der in der standard F -Levi-Untergruppe M_J liegt.

Die ${}^pZ(U_{\phi,J})$ sind von Dimension eins, kontrahierbar und $\delta({}^pU_{\phi,J})$ und $\delta^-({}^pU_{\phi,J})$ haben Dimension null und sind in ${}^pZ(U_{\phi,J})$ enthalten. Ganz ähnlich sind die $[\hat{T}]$ von Dimension zwei, kontrahierbar, und $\delta(T)$ und $\delta^-(T)$ haben Dimension eins und sind in $[\hat{T}]$ enthalten. Wir zeigen nun, dass ${}^pU_{\phi,J}U_{J,I} < TU_{J,I}$ äquivalent zu ${}^pU_{\phi,J}U_{J,I}^- < TU_{J,I}^-$ und äquivalent zu ${}^pZ(U_{\phi,J}) \subseteq [\hat{T}]$ für alle $p \in M_J(F)$ ist. Dann ist der Unterkomplex \mathcal{Z} der Zylinder über \hat{T}_J und gleichzeitig auch über ${}^{w_0}\hat{T}_{J'}$ und stellt daher eine Homotopie zwischen δ und δ^- her.

Die erste Äquivalenz ist klar, da sowohl δ als auch δ^- wohldefinierte Einbettungen sind. Für $p \in M_J(F)$ hat man ${}^pU_{\phi,J}U_{J,I} = {}^pU_{\phi,I}$. Sei also ${}^pU_{\phi,I} < TU_{J,I} = \hat{T}U_{J,I}$. Es folgt $\hat{T} \subseteq {}^pB_I$. Da die Levi-Zerlegung semidirekt ist und $\hat{T} \subseteq M_J$, ist $\hat{T} \subseteq {}^pB_J$. Alle maximalen split F -Tori in der auflösbaren Gruppe B_J sind durch ein $u \in U_{\phi,J}(F)$ konjugiert. Es gibt also ein $u \in U_{\phi,J}(F)$ mit ${}^{pu}T_0 = \hat{T}$. Da u in allen an $Z(U_{\phi,J})$ beteiligten Gruppen

liegt, ist ${}^pZ(U_{\phi,J}) = {}^{pu}Z(U_{\phi,J})$. Ganz klar ist $Z(U_{\phi,J}) \subseteq [T_0]$, da jede an $Z(U_{\phi,J})$ beteiligte Zelle kleiner als T_0 ist. Es folgt ${}^pZ(U_{\phi,J}) \subseteq {}^{pu}[T_0] = [\hat{T}]$. Ist umgekehrt ${}^pZ(U_{\phi,J}) \subseteq [\hat{T}]$, dann ist $\hat{T} \subseteq {}^pB_I$, und es folgt ${}^pU_{\phi,I} < \hat{T}U_{J,I} = TU_{J,I}$. \square

Sei $[T_0U_{J,I}]$ die 1-Zelle, welche zu der Gruppe $T_0U_{J,I}$ bezüglich der *CW*-Struktur auf \mathcal{W}_I korrespondiert. Der Rand von $[T_0]$ ist durch die Zellen in $Z(U_{\phi,J})$ und $Z({}^{\tau}U_{\phi,J})$ und die Zellen $[T_0U_{J,I}]$ und $[T_0U_{J,I}^-]$ gegeben. Ist nun $z = \sum_{p \in M_J(F)} \lambda_p {}^p[T_0U_{J,I}]$ ein 1-Zykel in $\delta(\hat{T}_J)$, so ist $\sum_{p \in M_J(F)} \lambda_p {}^p[T_0]$ eine 2-Kette in \mathcal{W}_I , welche z homolog zu $z' = \sum_{p \in M_J(F)} \lambda_p {}^p[T_0U_{J,I}^-]$ in $\delta^-(\hat{T}_J)$ macht. Wir verwenden hier zelluläre Homologie wie in May [May99, Ch. 13].

Es ist recht wahrscheinlich, dass auch im Allgemeinen der Schnitt von zwei oder mehr Apartments in \mathcal{W} kontrahierbar ist. Für Apartments im Tits-Gebäude wurde dies von Chao Ku in [Cha98] gezeigt. Damit wäre dann wohl eine Aussage wie in obiger Proposition auch für allgemeinere Gruppen und Situationen $J \subsetneq I$ mit $J > 1$ und $I > 2$ zu zeigen.

Im Folgenden fassen wir für $g \in M_I(F)$ und $L \subsetneq I$ die Räume ${}^g\hat{T}_L$ als mittels ${}^g\delta$ in $\hat{\mathcal{W}}_I$ eingebettet auf, wie am Anfang des Abschnitts beschrieben. Beachte, dass ${}^g\delta$ und ${}^{g'}\delta$ nicht übereinstimmen müssen, wenn sie dasselbe Bild haben. Wir sagen, dass der Unterraum ${}^g\hat{T}_J$ gegenüber von ${}^{g'}\hat{T}_{J'}$ liegt, wenn es ein $h \in M_I(F)$ gibt, so dass ${}^g\hat{T}_J$ das Bild von ${}^h\delta$ und ${}^{g'}\hat{T}_{J'}$ das Bild von ${}^h\delta^-$ ist.

Proposition 2.12. *Sei $J \subseteq I$ mit $|J| = 1$. Für jedes $u \in U_{J,I}^{\pm}(F)$ gibt es eine Homotopie von \hat{T}_J nach ${}^u\hat{T}_J$ in $\hat{\mathcal{W}}_I$, so dass ein Zykel $z \in Z_1(\hat{T}_J)$ zu ${}^uz \in Z_1({}^u\hat{T}_J)$ homolog ist.*

Beweis. Da ein $u \in U_{J,I}^-(F)$ trivial auf ${}^{w_0}\hat{T}_{J'}$ operiert, liegt der Unterraum ${}^u\hat{T}_J$ gegenüber von ${}^{w_0}\hat{T}_{J'}$, welcher wiederum gegenüber von \hat{T}_J liegt. Es gibt also nach Proposition 2.11 und Komposition eine Homotopie von \hat{T}_J nach ${}^u\hat{T}_J$. Wieder weil u trivial auf ${}^{w_0}\hat{T}_{J'}$ operiert, ist ein Zykel $z \in Z_1(\hat{T}_J)$ dadurch homolog zu uz . Mit Induktion über die Anzahl der Faktoren in dem Ausdruck $\prod u'_i u_i$ mit $u_i \in U_{J,I}^-(F)$ und $u'_i \in U_{J,I}(F)$ zeigen wir, dass es für jedes Element in $U_{J,I}^{\pm}(F)$ eine solche Homotopie gibt.

Man hat nach Induktionsvoraussetzung eine Homotopie von \hat{T}_J nach $\prod_{i=1}^{n-1} u'_i u_i \hat{T}_J$. Es gilt $u_n \in U_{J,I}^-(F)$ und $u'_n \in U_{J,I}(F)$. Wir haben wie oben eine Homotopie von ${}^{w_0}\hat{T}_{J'}$ nach ${}^{u_n}\hat{T}_J$. Dann erhält man auch eine Homotopie von ${}^{u'_n w_0}\hat{T}_{J'}$ nach ${}^{u'_n u_n}\hat{T}_J$. Außerdem hat man eine Homotopie von \hat{T}_J nach ${}^{u'_n w_0}\hat{T}_{J'}$. Durch Komposition erhält man eine Homotopie von \hat{T}_J nach ${}^{u'_n u_n}\hat{T}_J$ und damit eine von $\prod_{i=1}^{n-1} u'_i u_i \hat{T}_J$ nach $\prod_{i=1}^n u'_i u_i \hat{T}_J$. Letztlich erhält man so nach Komposition eine Homotopie von \hat{T}_J nach $\prod_{i=1}^n u'_i u_i \hat{T}_J$. Ein Zykel $z \in Z_1(\hat{T}_J)$ ist durch die in Proposition 2.11 beschriebene Homotopie

zu einem Zykel $z' \in Z_1({}^{w_0}\hat{\mathcal{T}}_{J'})$ homolog. Ersetzt man in obiger Induktion den Ausdruck $\hat{\mathcal{T}}_J$ durch z und ${}^{w_0}\hat{\mathcal{T}}_{J'}$ durch z' , so sieht man, dass z und $\prod_{i=1}^n u'_i z$ homolog sind. \square

2.4 Die erste Homologie von $\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_n(F)}$

Ist V ein \mathbb{Z} -Modul mit Operation einer Gruppe H , dann sind die *Koinvarianten* dieser Operation der Untermodul erzeugt von Elementen der Form $v - hv$ für $v \in V$ und $h \in H$. Er wird mit V_H bezeichnet.

Satz 2.13. *Sei $|S| > 2$ und $J \subsetneq S$ mit $|J| = 1$. Dann gibt es eine Surjektion von Gruppen*

$$H_1(\hat{\mathcal{T}}_J)_{U_{\phi,J}^\pm} \rightarrow H_1(\mathcal{W}).$$

Beweis. Nach Proposition 2.8 hat man eine Surjektion von Gruppen

$$\bigoplus_{\substack{|L|=1 \\ g \in G(F)/P_L(F)}} H_1(\hat{\mathcal{T}}_L) \rightarrow H_1(\mathcal{W}).$$

Für ein $L \subsetneq S$ mit $|L| = 1$ und ein $I \subsetneq S$ mit $|I| = 2$ und $I \supsetneq L$ gilt nach Proposition 2.12, dass für alle $u \in U_{L,I}^\pm(F) \subsetneq M_I$ der Komplex $\hat{\mathcal{T}}_L$ zu ${}^u\hat{\mathcal{T}}_L$ homotop in $\hat{\mathcal{W}}_I$ ist. Da $|S| > 2$ ist, kann man $\hat{\mathcal{W}}_I$ nach \mathcal{W} einbetten.

Das Element τ_i in $I - L$ hat einen Repräsentanten in $N_I \cap U_{L,I}^\pm \subseteq M_I$ und für ein zusammenhängendes I ist nach Lemma 2.10 sogar ganz W_I in $U_{L,I}^\pm(F) = U_{\phi,I}^\pm(F)$ repräsentiert. Die Gruppe $\mathcal{U}_L = \langle U_{L,I}^\pm(F) \mid |I| = 2, I \supsetneq L \rangle$ enthält also ein Repräsentantensystem von W und ist daher gleich $U^\pm(F)$. Durch Verkettung von Homotopien sieht man, dass $\hat{\mathcal{T}}_L$ für alle $u \in U^\pm(F)$ zu ${}^u\hat{\mathcal{T}}_L$ homotop ist. Nun hat jedes Element g in $G(F)/P_L(F)$ einen Repräsentanten in $U^\pm(F)$, da $U^\pm T_0 = G$, und wir können ohne Einschränkung diesen als \hat{g} wählen. Die Surjektion aus 2.8 verkürzt sich so zu einer Surjektion

$$\bigoplus_{|L|=1} H_1(\hat{\mathcal{T}}_L) \rightarrow H_1(\mathcal{W}).$$

Sei $L \subsetneq S$ eine von J verschiedene Teilmenge mit $|L| = 1$. Für $I = J \cup L$ ist dann ${}^{w_0}\hat{\mathcal{T}}_L$ gegenüberliegend von $\hat{\mathcal{T}}_J$ in $\hat{\mathcal{W}}_I$ und nach Proposition 2.11 daher homotop zu $\hat{\mathcal{T}}_J$ in $\hat{\mathcal{W}}_I$. Hierbei ist w_0 das längst Element in W_I .

Nach Proposition 2.12 und Verkettungen von Homotopien wie oben ist ein $z \in H_1(\hat{\mathcal{T}}_J)$ zu ${}^u z \in H_1(\hat{\mathcal{T}}_J)$ für alle $U_{\phi,J}^\pm(F) \subseteq U^\pm(F)$ in $H_1(\mathcal{W})$ homolog. \square

Der Beweis nutzt aus, dass alle $L \subseteq I$ mit $|L| = 1$ assoziiert sind im Sinne von Carter [Car85, 9.2.2].

Proposition 2.14. *Sei $L \subseteq S$ mit $|L| = 1$. Wenn -1 in F ein Quadrat ist oder wenn F ein endlicher Körper ist, dann ist $H_1(\hat{\mathcal{T}}_L)_{U_{\phi,L}^\pm}$ eine endliche Gruppe.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass F ein endlicher Körper $F = \mathbb{F}_q$ mit $q = p^r$ ist. Es gibt dann genau $q + 1$ Borel-Untergruppen von $M_L(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{Sl}_2(\mathbb{F}_q)$ und je zwei von ihnen enthalten gemäß Bruhat-Zerlegung einen gemeinsamen maximalen Torus. Dieser ist in $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{F}_q)$ auch eindeutig bestimmt, da ein maximaler split F -Torus zu einem eindeutigen Apartment korrespondiert und Apartments hier 0-Sphären sind. Der Komplex $\hat{\mathcal{T}}_L$ ist also das 1-Skelett des q -Simplex Δ_q . Wir wollen die Notation in diesem Beweis vereinfachen und setzen $B = B_J$ und $U = U_{\phi,J}$. Man hat in $M_L(\mathbb{F}_q)$ die F -Borel-Gruppen $B = UT_0$ und ${}^u B^-$ für $u \in U(\mathbb{F}_q)$. Hierbei ist ${}^u B^-$ eindeutig durch $u \in U(\mathbb{F}_q)$ bestimmt. $U(\mathbb{F}_q)$ ist zur additiven Gruppe \mathbb{F}_q isomorph durch

$$\begin{aligned} f : \mathbb{F}_q &\rightarrow U(\mathbb{F}_q) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und wir bezeichnen die Gruppe ${}^u B^-$ auch mit ${}^a B^-$ für $u = f(a)$. Es gilt ${}^0 B^- = B^-$. Die Matrizen seien hier als kanonisch in $M_L(\mathbb{F}_q)$ eingebettet aufgefasst. Durch die Wahl eines geordneten Tripels $z = (B', B'', B''')$ von verschiedenen F -Borel-Gruppen ist bis auf Rotation der Einträge ein eindeutiger Zykel in $Z_1(\hat{\mathcal{T}}_L)$ bestimmt. Die Klassen der Zykel dieser Form erzeugen $H_1(\hat{\mathcal{T}}_L)$. Es genügt also zu zeigen, dass jedes dieser Zykel modulo der Operation von $U^\pm(\mathbb{F}_q)$ endliche Ordnung hat. Um zu zeigen, dass z torsion ist, genügt es daher zu zeigen, dass $\sum_{u \in U^\pm(\mathbb{F}_q)} {}^u z = 0$ ist. Eine (orientierte) Kante in dem Komplex $\hat{\mathcal{T}}_L$ ist durch ein geordnetes Paar (B', B'') von verschiedenen F -Borel-Gruppen gegeben und diese korrespondiert zu dem Torus $B' \cap B''$. Wir wollen nun den Koeffizienten der Kante (B', B'') in der Kette $\sum_{u \in U^\pm(\mathbb{F}_q)} {}^u z$ bestimmen. Wir betrachten zunächst nur die Kante $\kappa = (B, B^-)$ und den Zykel $z = (B, B^-, {}^1 B^-)$. Die Tripel im Orbit von z , die κ enthalten, entstehen aus z durch Operation von Elementen in $T_0 \cap U^\pm(\mathbb{F}_q)$. Ein solches Element $t(x)$ hat die Form

$$t(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \text{ für } x \in \mathbb{F}_q^*$$

und operiert auf ${}^1 B^-$ durch $t(x)({}^1 B^-) = x^2 B^-$. Da $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$, gibt es für $p \neq 2$ genau $\frac{1}{2}(q-1)$ Tripel $x \in U^\pm(\mathbb{F}_q)z$ (modulo Rotation) welche die Kante κ enthalten. Ist $p = 2$, so gibt es $q-1$ solcher Tripel. Die Tripel im Orbit von z , die $-\kappa = (B^-, B)$ enthalten entstehen aus z durch Operation

von Elementen in $(N(T_0) \cap U^\pm(\mathbb{F}_q)) - T_0$. Ein solches Element $w(x)$ hat die Form

$$w(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in U^\pm(\mathbb{F}_q)$$

und operiert auf ${}^1B^-$ durch $w(x)({}^1B^-) = -x^2 B^-$. Hier gilt $-x^2 = -y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$. Es gibt also genauso viele Tripel im Orbit von z , welche die Kante $-\kappa$ enthalten, wie es Tripel gibt, die κ enthalten. Insgesamt folgt, dass der Koeffizient von κ in der Summe $\sum_{u \in U^\pm(\mathbb{F}_q)} u z$ null ist. Für einen Zykel (B', B'', B''') ist $B' \cap B'' = T$ ein Torus und es gibt ein $g \in M_J(\mathbb{F}_q)$ mit $T = {}^g T_0$, ${}^g B = B'$ und ${}^g B^- = B''$. Der Torus $T_0(\mathbb{F}_q)$ operiert transitiv auf den F -Borel-Gruppen ungleich B und B^- und damit transitiv auf Zykeln der Form $(B, B^-, {}^a B^-)$ mit $a \neq 0$. Es gibt also ein $t \in T_0(\mathbb{F}_q)$ mit ${}^{gt}({}^1 B^-) = B'''$. Weil $U^\pm(\mathbb{F}_q)$ normal in $M_L(\mathbb{F}_q)$ ist, ist für $u \in U^\pm(\mathbb{F}_q)$ auch ${}^{gt}u \in U^\pm(\mathbb{F}_q)$, und man hat $({}^{gtu})(B', B'', B''') = {}^{gtu}(B, B^-, {}^1 B^-)$. Durch Konjugation sieht man nun, dass auch die Koeffizienten aller anderen Kanten in $\sum_{u \in U^\pm(\mathbb{F}_q)} u z$ null sind.

Sei nun F ein beliebiger Körper in dem -1 ein Quadrat ist. Der simpliziale Komplex \hat{T}_J hat auch hier als Ecken die Menge der F -Borel-Untergruppen von M_J und jeweils zwei Ecken bilden ein 2-Simplex. Wir können nun wie im endlichen Fall fortfahren.

Man hat $-x^2 B^- = {}^1 B^-$ genau dann, wenn $x^2 = -1$. Da -1 ein Quadrat in F ist, kann man also schreiben

$$w^{(i)}(B, B^-, {}^1 B^-) = (B^-, B, {}^1 B^-).$$

Also mit $z = (B, B^-, {}^1 B^-)$ ist $z \equiv -z$ modulo der Operation von $U^\pm(F)$. Ein entsprechendes Ergebnis hat man auch für alle anderen Tripel. Da eine Summe von Tripeln nur null sein kann, wenn sie eine gerade Anzahl an Summanden hat, folgt in diesem Fall sogar $H_1(\hat{T}_L)_{U^\pm(F)} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. \square

Korollar 2.15. *Sei $G = \mathrm{Sl}_{d+2}(F)$, wobei F ein endlicher Körper oder ein Körper ist, in dem -1 ein Quadrat ist. Für $d = 1$ hat man*

$$H_1(\mathcal{W}_G, \mathbb{Q}) = St_G + \sum_{\substack{|J|=1 \\ J \subsetneq S}} \mathrm{ind}_{P_J}^G H_1(\hat{T}_J, \mathbb{Q})$$

Für $d \geq 2$ gilt $H_1(\mathcal{W}_G, \mathbb{Q}) = 0$ und für $d = 2$ gilt

$$H_2(\mathcal{W}_G, \mathbb{Q}) = St_G + \sum_{\phi \neq J \subsetneq S} (-1)^{|J|} \mathrm{ind}_{P_J}^G H_{|J|}(\hat{T}_J, \mathbb{Q})$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Proposition 2.8, die zweite Aussage ergibt sich aus Satz 2.13 und Proposition 2.14, und die dritte Aussage folgt aus der zweiten zusammen mit Proposition 2.9. \square

Man beachte, dass $H_{|J|}(\hat{T}_J, \mathbb{Q})$ durch Lemma 2.4 noch genauer beschrieben ist.

Zuletzt wollen wir noch einen wesentlich einfacheren Beweis für das Verschwinden der rationalen ersten Homologie der Wagoner-Komplexe von $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)$ für $n \geq 4$ geben. Wagoner zeigt in [Wag75b] mit Hilfe von [Wag75a, Prop. 2], dass $K_2(\mathbb{F}_q) = \pi_1(\mathcal{W}'_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)})$ für $n \geq 4$. Die K -Theorie von endlichen Körpern ist von Quillen vollständig bestimmt worden (siehe z.B. [Knu01]) und besagt, dass $K_2(\mathbb{F}_q) = 0$ ist. Dann folgt auch $H_1(\mathcal{W}'_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)}) = 0$ für $n \geq 4$. Man hat in dieser Situation die Spektralsequenz einer N_n -Faserung bezüglich der \mathbb{F}_q -rationalen Punkte N_n des Normalisators des standard maximalen Torus T_0 in $\mathrm{Sl}_n(k)$

$$H_p(N_n, H_q(\mathcal{W}'_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)})) \Rightarrow H_{p+q}(\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)}).$$

Vergleiche hierzu Weibel [Wei94, Th. 6.10.10]. Die exakte Sequenz der niedrigen Terme dieser Spektralsequenz ist dann mit $H_0(N_n, H_1(\mathcal{W}'_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)})) = 0$

$$0 \rightarrow H_1(\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)}) \rightarrow H_1(N_n, H_0(\mathcal{W}'_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)})) = N_n/[N_n, N_n] \rightarrow 0.$$

Die Gruppe $N_n/[N_n, N_n]$ ist eine endliche, abelsche Gruppe, und somit ist $H_1(\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)}, \mathbb{Q}) = 0$.

Die symmetrische Gruppe Sym_n ist ein Quotient von N_n , und deren Kommutator ist die alternierende Untergruppe Alt_n . Aus Indexberechnungen folgt $Sym_n/Alt_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für alle n . Man sieht, dass $N_n/[N_n, N_n]$ dann nicht trivial sein kann. Insbesondere folgt hieraus, dass $\mathcal{W}_{\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)}$ für $n \geq 4$ kein Bouquet von Sphären ist.

3 Eine Steinberg-Darstellung für $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$

Sei p eine Primzahl ungleich 2 und sei $n \geq 3$. Sei F ein nicht archimedischer lokaler Körper mit Restklassenkörper \bar{F} der Charakteristik p . Sei \mathcal{O} der Ring der ganzen Zahlen von F , und sei π ein Erzeuger des maximalen Ideals \mathfrak{p} in \mathcal{O} . Normalisiere die Bewertung v von F so, dass $v(\pi) = 1$. Setze $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}/\pi^i\mathcal{O}$, und sei $|\bar{F}|$ die Anzahl der Elemente in \bar{F} . Sei $G^i = \mathrm{Gl}_n(\mathcal{O}_i)$ und W die Gruppe der Permutationsmatrizen mit dem üblichen Erzeugendensystem $S = \{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$. Schreibe $G^\infty = \mathrm{Gl}_n(\mathcal{O})$, und sei B^i die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in G^i . Fixiere nun eine ganze Zahl $l \geq 2$, und schreibe $G = G^l$ und $B = B^l$. Sei $pr_i : G \rightarrow G^i$ die kanonische Projektion mit Kern K_i , und bezeichne die Gruppe der unteren Dreiecksmatrizen in G mit B^- und die Gruppe der unteren Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale mit U^- . Seien $K_i^- = K_i \cap U^-$ und $K_i^+ = K_i \cap B$. Es gilt $K_i = K_i^- K_i^+ = K_i^+ K_i^-$, was man durch ein Abzählargument feststellt.

3.1 Ein System von Untergruppen von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$

Man hat die Gruppen

$$P_I = \{(m_{ij}) \in G \mid m_{ij} = 0 \text{ falls } [j, i] \cap I \neq \emptyset\}$$

als standard parabolische Untergruppen von G . Diese sind die Stabilisatoren der Flaggen von standard freien Untermoduln in \mathcal{O}_l^n (vgl. Lees [Lee78]) und damit Gruppen von oberen Blockdreiecksmatrizen mit Einträgen in \mathcal{O}_l . Für $I \subseteq S$ und $r \leq l$ setze $P_{I,r} = P_I \cap pr_r^{-1}(B^r)$. Für jedes I ist dann $P_{I,l} = B$. Fixiere ein $a \in \{2, \dots, l\}$ und ein $I_0 \subseteq S$. Setze $I_0^- = S - I_0$. Wir definieren nun für $s = \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ Untergruppen von K_a^- . Für $s \in I_0$ sei

$$X_s = \{(m_{ij}) \in K_1^- \cap P_{I_0, a-1} \mid m_{ij} \in \mathfrak{p}^a \text{ für } (i, j) \neq (s+1, s)\},$$

und für $s \in I_0^-$ setze

$$X_s = \{(m_{ij}) \in K_1^- \cap P_{I_0^-, l-1} \mid m_{ij} = 0 \text{ für } (i, j) \neq (s+1, s)\}.$$

Für $I \subseteq S$ mit $I \neq \emptyset$ sei dann $X_I = \langle X_s \mid s \in I \rangle$, und setze noch $X_\emptyset = K_1^- \cap P_{I_0, a}$. Definiere dann $H_I = X_I B$. Wir führen die Wahl von I_0 und a nicht in der Bezeichnung von X_I mit. Merke, dass die Definition der H_I für $a = l$ nicht von der Wahl von I_0 abhängt.

Lemma 3.1. *Für $I, J \subseteq S$ gilt $X_I X_J = X_J X_I$ und $X_I B = B X_I$. Die H_I sind also Gruppen.*

Beweis. Wir betrachten die Projektion pr_a eingeschränkt auf X_S . Setze $\bar{X}_I = pr_a(X_I)$. Man hat $\ker(pr_a|_{X_S}) = K_a^- \cap P_{I_0,a}$. Man sieht leicht, dass \bar{X}_S eine abelsche Gruppe ist. Für zwei $x_s \in X_s$ und $x_{s'} \in X_{s'}$ mit $s, s' \in I_0$ gilt also $x_s x_{s'} = x_{s'} x_s k$ mit $k \in K_a^- \cap P_{I_0,a} \subseteq X_s$. Es folgt $X_s X_{s'} = X_{s'} X_s$. Man hat auch $X_s X_{s_0} = X_{s_0} X_s$ für $s_0 \in I_0^-$, da K_{I-1} zentral in K_{a-1} ist. Schließlich ist $X_{I_0^-}$ abelsch. Insgesamt folgt also $X_I X_J = X_J X_I$.

Für die zweite Aussage sei nun $s \in I_0$, $x \in X_s$ und $b \in B$. Es genügt hier den Fall $n = 2$ zu betrachten. Es ist

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s\pi^{a-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

mit $v, s \in \mathcal{O}_a$ und $u, w \in \mathcal{O}_a^*$. Man sieht

$$\begin{pmatrix} u - v \frac{su}{vs\pi^{a-1} + w} \pi^{a-1} & v \\ 0 & vs\pi^{a-1} + w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{su}{vs\pi^{a-1} + w} \pi^{a-1} & 1 \end{pmatrix} = \bar{x}\bar{b} .$$

Es gibt also $b' \in B$, $x' \in X_s$ und $k \in \ker(pr_a|_{P_{I_0}}) = K_a \cap P_{I_0}$ mit $xbk = b'x'$. Man hat $k = k^+k^-$ mit $k^+ \in K_a^+$ und $k^- \in K_a^-$. Da $k^- \in X_s$ ist, folgt $X_s B = B X_s$. Ähnlich wie oben rechnet man elementar im Fall $n = 2$ nach, das dies auch für den Fall $s \in I_0^-$ gilt. Für $I \neq \emptyset$ folgt zusammen mit der ersten Aussage des Lemmas $X_I B = B X_I$. Für die leere Menge hat man $X_\emptyset B = B X_\emptyset$, da $K_a \cap P_{I_0,a}$ normal in $P_{I_0,a}$ ist. \square

Man sieht $H_\emptyset = P_{I_0,a}$. Alternativ kann man die anderen H_I auch auf folgende Weise definieren. Für $s \in I_0$ setze $H_s = \langle H_\emptyset, P_{\{s\},a-1} \rangle$, und für $s \in I_0^-$ setze $H_s = \langle H_\emptyset, P_{\{s\},l-1} \rangle$. Dann ist $H_I = \langle H_i \mid \tau_i \in I \rangle$.

Proposition 3.2. *Seien $I, J \subseteq S$ und $g \in G$. Dann gilt*

1. ${}^g H_J \subseteq H_I \quad \Rightarrow \quad g \in H_I$
2. $N(H_I) = H_I$
3. $H_I H_J = H_J H_I$
4. $\langle H_I, H_J \rangle = H_{I \cup J}$
5. $H_J \subseteq H_I \quad \Leftrightarrow \quad J \subseteq I$
6. $H_I \cap H_J = H_{I \cap J}$

Beweis. Punkt (4) folgt direkt aus der Definition, und Punkt (2) folgt direkt aus Punkt (1). Außerdem folgt Punkt (3) direkt aus den Aussagen von Lemma 3.1. Man sieht, dass $X_s \subseteq X_I$ genau dann, wenn $\tau_s \in I$. Zu Punkt (5). Sei $H_J \subseteq H_I$. Dann ist $X_J \subseteq X_I B$. Für $x \in X_J$ und $b \in B$ ist xb genau dann

eine untere Dreiecksmatrix, wenn b Diagonalgestalt hat. Es folgt $X_J \subseteq X_I$ und dann auch $J \subseteq I$. Seien für Punkt (6) $x \in X_I$, $x' \in X_J$ und $b, b' \in B$ mit $xb = x'b'$. Dann ist $x = x'b'b^{-1}$, und genau wie bei Punkt (5) folgt $b'b^{-1} = 1$. Also hat man $X_I B \cap X_J B = (X_J \cap X_I)B$. Nach der Aussage vor dem Beweis zu Punkt (5) gilt $X_I \cap X_J = X_{I \cap J}$. Es bleibt Punkt (1). Sei $g \in G$ mit ${}^g H_J \subseteq H_I$. Dann ist auch ${}^g B \subseteq X_I B = H_I$. Aus der Bruhat-Zerlegung in G^1 folgt, dass es $b, b' \in B$, $w \in W$ und $k \in K_1^-$ gibt mit

$$g = bkw b' .$$

Es ist also zu zeigen, dass $kw \in X_I B$. Angenommen $w \neq 1$. Dann gibt es ein $b \in B$ mit ${}^w b \in B^-$ und ${}^w b \notin K_1$ (z.B. b ein Element einer geeigneten einfachen Wurzelgruppe mit einer Einheit als Eintrag außerhalb der Diagonalen.) Da $k \in K_1^-$, folgt ${}^{kw} b \in B^-$. Aber ${}^{kw} b \notin K_1$, weil sonst auch ${}^w b \in K_1$ wäre. Nun ist $X_I B \cap B^- \subset K_1$, und man hat somit ${}^{kw} b \notin X_I B$. Das widerspricht der Voraussetzung ${}^{kw} B \subseteq X_I B$. Es folgt $w = 1$.

Es ist nun noch zu zeigen, dass k in $X_I B$ liegt. Betrachte die Diagonalmatrizen $d_i(2) \in B$ welche an der Stelle i eine 2 und sonst überall eine 1 auf der Diagonale haben ($p \neq 2$). Bezeichne die Matrix, welche als i -te Zeile die i -te Zeile von k^{-1} hat und sonst ausschließlich mit Nullen besetzt ist, mit $k^{-1}|_i$. Es gilt

$$kd_i(2)k^{-1} = k(k^{-1} + k^{-1}|_i) = I + kk^{-1}|_i$$

Die i -te Spalte der Matrix $k^{-1}|_i$ ist der i -te standard Basisvektor, da $k^{-1} \in K_1^-$. Somit ist $(kd_i(2)k^{-1})_{si} = k_{si}$ für alle $s > i$. Die Matrix $kd_i(2)k^{-1}$ liegt nach Voraussetzung in $X_I B$. Durch direkten Vergleich der Matrixkoeffizienten folgt $k \in X_I B$, und Punkt (1) ist bewiesen. \square

Für $p = 2$ sind die Punkte (1) und (2) aus dem Lemma nicht richtig, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt. Mit

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{l-1} & 1 \end{pmatrix}$$

ist $mBm^{-1} \subseteq B$. Dies gilt analog auch für $n > 2$.

Ist allgemein $H \subseteq G$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G und B Untergruppe von H , so induziert die kanonische Projektion $G/H \rightarrow G/B$ eine Einbettung $1_H^G \hookrightarrow 1_B^G$ durch $g \mapsto 1/|H| \sum_{x \in gH} x$. Im Folgenden identifizieren wir die Darstellung 1_H^G immer mit ihrem Bild in 1_B^G .

Lemma 3.3. *Seien $B \subseteq H, H' \subseteq G$ Untergruppen einer Gruppe G . Dann gilt*

$$1_H^G \cap 1_{H'}^G = 1_{\langle H, H' \rangle}^G .$$

als Unterdarstellungen von 1_B^G .

Beweis. Man hat $1_H^G = \{\mu : G/B \rightarrow \mathbb{Q} \mid \mu \text{ konstant auf } gH \text{ f\"ur alle } g \in G/B\}$. Liegt α in $1_{\langle H, H' \rangle}^G$, so ist α konstant auf $g\langle H, H' \rangle$ f\"ur alle $g \in G/B$. Also ist α auch konstant auf gH und auf gH' f\"ur alle $g \in G/B$. Somit liegt α in $1_H^G \cap 1_{H'}^G$.

Sei α nun in $1_H^G \cap 1_{H'}^G$ und $a \in g\langle H, H' \rangle$. Es gibt Elemente $h_i \in H$ und $h'_i \in H'$ mit $a = g \prod_{i=1}^m h_i h'_i$. Per Induktion \"uber m zeigt man $\alpha(a) = \alpha(g)$. Sei $m = 1$, also $a = gh h'$. Dann ist $\alpha(a) = \alpha(gh)$, da $\alpha \in 1_{H'}^G$. Weil $\alpha \in 1_H^G$, ist auch $\alpha(a) = \alpha(g)$. Bei dem Schritt von m auf $m+1$ verf\"ahrt man genauso. Somit faktorisiert α \"uber $\langle H, H' \rangle$ und liegt in $1_{\langle H, H' \rangle}^G$. \square

Korollar 3.4. *F\"ur $I, J \subseteq S$ gilt*

$$1_{H_I}^G \cap 1_{H_J}^G = 1_{H_{I \cup J}}^G$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Lemma 3.3 zusammen mit Proposition 3.2 (4). \square

3.2 Eine Steinberg-Darstellung

Im Folgenden wird die Grothendieck Gruppe $K_0(\mathrm{Rep}_G)$ der endlich dimensionalen Darstellungen auf \mathbb{Q} -Vektorr\"aumen von G betrachtet. Anstelle von \mathbb{Q} k\"onnte man f\"ur unsere Zwecke auch jeden anderen K\"orper der Charakteristik 0 nehmen. F\"ur den Beweis von Satz 3.14 ist es auf Seite 52 aber notwendig, dass wir Darstellungen auf Vektorr\"aumen \"uber K\"orpern der Charakteristik 0 betrachten. Die Elemente von $K_0(\mathrm{Rep}_G)$ sind die *virtuellen* Darstellungen, und eine virtuelle Darstellung hei\"st *positiv*, wenn sie zu einer endlich dimensionalen Darstellung von G \"aquivalent ist in $K_0(\mathrm{Rep}_G)$.

Definition 3.5. F\"ur eine Teilmenge $I_0 \subseteq S$ und ein $a \in \{2, \dots, l\}$ definiere die virtuelle Darstellung $S_{I_0, a}$ von P_{I_0} durch

$$S_{I_0, a} = \sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} 1_{H_I}^{P_{I_0}}.$$

Die verallgemeinerte *Steinberg-Darstellung* von G sei

$$St_G = S_{S, l} = S_{I_0, l}$$

Das System der Untergruppen H_I und damit auch die Definition der Steinberg-Darstellung ist f\"ur $a = l$ nicht von I_0 abh\"angig. Die Darstellungen $S_{S, a}$ sind die verallgemeinerten Steinberg-Darstellungen von G^a aufgefasst als Darstellungen von G .

Proposition 3.6. $S_{I_0, a}$ ist eine Unterdarstellung von $1_{H_\phi}^G$ und damit insbesondere positiv. Desweiteren enth\"alt kein $1_{H_I}^G$ f\"ur $I \neq \phi$ eine irreduzible Komponente, deren Typ auch in $S_{I_0, a}$ vorkommt, und $S_{I_0, a}$ ist die gr\"o\"ste Unterdarstellung von $1_{H_\phi}^G$ dieser Art.

Beweis. Sei ρ eine isotypische Komponente in $1_{H_\phi}^G$. Setze

$$\rho_I = \begin{cases} \rho \cap 1_{H_I}^G & \text{falls } I \subseteq S \text{ maximal mit } \rho \cap 1_{H_I}^G \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $J \subseteq S$ mit $\rho_I \cap 1_{H_J}^G \neq 0$, dann folgt nach Korollar 3.4, dass auch $\rho_{I \cup J} \neq 0$. Weil I maximal mit dieser Eigenschaft ist, muss J in I enthalten sein. Also

$$\rho_I \cap 1_{H_J}^G \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad I \supseteq J$$

Ist $I' \subseteq S$ eine weitere Teilmenge mit $\rho_{I'} \neq 0$, dann ist $\rho_I \cap \rho_{I'} = 0$, da anderenfalls $\rho_I \cap \rho_{I'} \subseteq 1_{H_I}^G \cap 1_{H_{I'}}^G = 1_{H_{I \cup I'}}^G$ eine echter Unterraum und somit I nicht maximal mit der Eigenschaft $\rho \cap 1_{H_I}^G \neq 0$ gewesen wäre. Daraus folgt $\rho = \bigoplus_{I \subseteq S} \rho_I$, und man erhält folgende Formel für $1_{H_J}^G$

$$1_{H_J}^G = \bigoplus_{\rho} \bigoplus_{I \supseteq J} \rho_I.$$

Damit kann man schreiben

$$S_{I_0, a} \cong \bigoplus_{\rho} \bigoplus_{J \subseteq S} \bigoplus_{I \supseteq J} (-1)^{|J|} \rho_I \cong \bigoplus_{\rho} \bigoplus_{I \subseteq S} \bigoplus_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} \rho_I.$$

Ist $I \neq \phi$, dann hat man

$$\bigoplus_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} \rho_I = \sum_{i=0}^{|I|} \binom{|I|}{i} (-1)^i \rho_I = (1-1)^{|I|} \rho_I = 0$$

Ist dagegen $I = \phi$, so erhält man $\bigoplus_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} \rho_I = (-1)^{|\phi|} \rho_\phi = \rho_\phi$. Insgesamt folgt

$$S_{I_0, a} = \bigoplus_{\rho} \rho_\phi,$$

und $S_{I_0, a}$ ist somit Unterdarstellung von $1_{H_\phi}^G$.

Ist ρ eine isotypische Komponente mit $\rho_\phi \neq 0$, so folgt nach Definition $\rho_I = 0$ für alle $I \neq \phi$ und damit die zweite Aussage des Lemmas. Ist umgekehrt ρ eine isotypische Komponente ungleich null mit $\rho_I = 0$ für alle $I \neq \phi$, so muss $\rho = \rho_\phi \neq 0$ sein. \square

Obiges Lemma gilt in einer allgemeineren Situation: Sei S eine endliche Menge und G eine Gruppe. Ordne jeder Teilmenge I von S eine Untergruppe H_I von G zu, so dass für alle $I, J \subseteq S$ gilt $\langle H_I, H_J \rangle = H_{I \cup J}$. Dann ist die virtuelle Darstellung

$$D = \sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} 1_{H_I}^G$$

eine Unterdarstellung von $1_{H_\phi}^G$ und damit insbesondere positiv.

Lemma 3.7. *Der Grad der verallgemeinerten Steinberg-Darstellung für $F = \mathbb{Q}_p$ ist*

$$\deg(\mathrm{St}_G) = p^{\frac{1}{2}(n-1)(n(l-1)-2)} \prod_{i=2}^n (p^i - 1)$$

Beweis. Im Beweis von Proposition 3.2 haben wir gesehen, dass $H_I = X_I B$, und da $X_I \cap B = \{1\}$, folgt

$$|H_I| = |X_I||B| = p^{|I|}|B|.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \deg(\mathrm{St}_G) &= \sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} |G/H_I| = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i |G/B| p^{-i} \\ &= |G/B| \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-1} = |G/B| \frac{(p-1)^{n-1}}{p^{n-1}} \end{aligned}$$

Man sieht, dass $|K_1| = p^{n^2(l-1)}$ und $|G^l| = |K_1||G^1| = p^{n^2(l-1)} p^{\frac{1}{2}(n^2-n)} \prod_{i=1}^n (p^i - 1)$. Die Ordnung von B ist $|B| = (p-1)^n p^{n(l-1)} p^{\frac{1}{2}(n^2-n)l}$ (vgl. Lees [Lee78]). Nach einer kurzen Rechnung folgt die Behauptung. \square

3.3 Die Steinberg-Darstellung als Homologie-Darstellung

Der Flaggenkomplex einer teilgeordneten endlichen Menge ist ein kompakter simplizialer Komplex. Seine k -Simplizes sind strikt total geordnete $(k+1)$ -elementige Teilmengen. Ein simplizialer Komplex kann bezüglich der Inklusion seiner Simplizes auch als teilgeordnete Menge aufgefasst werden. Ist eine teilgeordnete Menge in diesem Sinne isomorph zu einem simplizialen Komplex, dann bezeichnen wir sie auch als simplizialen Komplex. Die k -Simplizes in einer solchen teilgeordneten Menge sind die Elemente, welche unter diesem Isomorphismus zu k -Simplizes korrespondieren. In einem simplizialen Komplex sind zwei Simplizes gleich genau dann, wenn sie dieselben Ecken (d.h. einelementige Teilmengen) haben. Die Dimension des simplizialen Komplexes X ist dann

$$\dim(X) = \max\{|s| ; s \text{ eine Flagge}\} - 1.$$

Für einen topologischen Raum X wird im Folgenden die rationale reduzierte Homologie mit $H_i(X)$ bezeichnet.

Lemma 3.8. *Die Menge $\mathcal{T}^l = \{gH_I \mid g \in P_{I_0}, I \subsetneq S\}$ ist mit der Teilordnung*

$$gH_I < g'H_J \Leftrightarrow gH_I \supsetneq g'H_J$$

ein simplizialer Komplex der Dimension $n-2$. Die i -Simplizes sind dann gerade diejenigen gH_I mit $|I| = n-2-i$.

Beweis. Konstruiere zunächst den folgenden simplizialen Komplex. Betrachte die Menge der Ecken $\{gH_I \mid I \subsetneq S \text{ maximal}, g \in P_{I_0}\}$. Eine $(k+1)$ -elementige Teilmenge $\{g_0H_{I_0}, \dots, g_kH_{I_k}\}$ sei ein k -Simplex genau dann, wenn es ein $g \in P_{I_0}$ gibt, mit

$$\bigcap_{i=0}^k g_iH_{I_i} = g \bigcap_{i=0}^k H_{I_i}.$$

Es gilt dann sofort $g_iH_{I_i} = gH_{I_i}$ für alle $i = 0, \dots, k$. Dies ergibt per Definition einen simplizialen Komplex \mathcal{T}' . Nach Proposition 3.2 (6) hat man $\bigcap_i H_{I_i} = H_{\bigcap_i I_i}$, und wenn $g_iH_{I_i} = g'_iH_{I'_i}$, dann folgt nach Proposition 3.2 (5) $I_i = I'_i$. Wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathcal{T}' &\longrightarrow \mathcal{T}^l \\ \{g_iH_{I_i}\}_i &\longmapsto gH_{\bigcap_i I_i} \end{aligned}$$

Für jedes $J \subsetneq S$ lassen sich (auf eindeutige Weise) maximale $I_i \subsetneq S$ finden, so dass $J = \bigcap_i I_i$ ist. Dann ist $gH_J = \bigcap_i gH_{I_i}$ und liegt somit im Bild der Abbildung f . Die Abbildung ist also surjektiv. Ist nun $gH_{\bigcap_i I_i} = g'H_{\bigcap_i I'_i}$, so gilt auch $H_{\bigcap_i I_i} = H_{\bigcap_i I'_i}$ und $\bigcap_i I_i = \bigcap_i I'_i$. Dann gilt, weil die I_i und I'_i maximal sind, bis auf Permutation $I_i = I'_i$, und f ist auch injektiv. Die Abbildung ist ordnungserhaltend, und weil die Schnitte $\bigcap_i I_i$ die Mengen I_i eindeutig bestimmen, ist auch f^{-1} ordnungserhaltend. Man sieht leicht, dass der Komplex \mathcal{T}' abgeschlossen und von reiner Dimension ist. Er ist $(n-2)$ -dimensional, da es $n-1$ maximale echte Teilmengen von S gibt. Die letzte Behauptung des Lemmas folgt auch aus der Bijektivität von f . \square

Weil die Gruppen H_I ihre eigenen Normalisatoren sind, gibt es eine Bijektion zwischen $\{{}^gH_I \mid g \in P_{I_0}, I \subsetneq S\}$ und den Nebenklassen $\{gH_I \mid g \in P_{I_0}, I \subsetneq S\}$. Verwendet man in der ersten Menge die umgekehrte Inklusion als Teilordnung, dann ist diese Bijektion in beiden Richtungen ordnungserhaltend, denn nach Proposition 3.2 (1) ist

$${}^gH_I \supseteq {}^{g'}H_J \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H_I \text{ und } H_I \supseteq H_J \Leftrightarrow gH_I \supseteq g'H_J$$

Auch die Operation von P_{I_0} wird von dieser Bijektion erhalten. Im Folgenden werden wir die Schreibweise mit den Nebenklassen für \mathcal{T}^l verwenden, da dies einige Rechnungen vereinfacht.

Der *Typ* eines Simplex gH_I sei die Menge I . Er ist wohldefiniert, denn ist $gH_I = g'H_J$, so gilt $H_I = H_J$ und damit nach Proposition 3.2 (5) $I = J$. Außerdem erhält die Operation von P_{I_0} auf \mathcal{T}^l den Typ.

Definition 3.9. Sei T ein simplizialer Komplex. Wir definieren den *m-fachen Kegel* K^mT über T . Die Ecken des m -fachen Kegels über T entstehen

aus denen von T durch hinzufügen von m Ecken. Diese m Ecken nennen wir *Kegelspitzen*. Die Menge der k -Simplizes in $K^m T$ sei dann

$$\{\{p_0, \dots, p_k\} \text{ Simplex in } T\} \cup \\ \{\{x, p_1, \dots, p_k\} | x \text{ Kegelspitze, } \{p_1, \dots, p_k\} \text{ Simplex in } T\}.$$

Bevor wir mit der Analyse der Homologie von \mathcal{T}^l beginnen, benötigen wir noch ein Lemma aus der algebraischen Topologie.

Lemma 3.10. *Sei $K^m T$ der m -fache Kegel über einem simplizialen Komplex T . Für Paare von Kegelspitzen (x, x') und Homologieklassen z von T gibt es Homologieklassen $[x - x', z]$ von $K^m T$, für die gilt*

1. *Man hat für drei Kegelspitzen x, x', x'' und zwei Homologieklassen z, z' von T*

$$(a) [x - x', z] + [x - x', z'] = [x - x', z + z'],$$

$$(b) [x - x', z] + [x' - x'', z] = [x - x'', z],$$

$$(c) [x - x, z] = [x - x', 0] = 0 \text{ die triviale Homologieklasse.}$$

2. *Sei $i > 0$ eine ganze Zahl, x_0 eine Kegelspitze und \mathcal{B}_{i-1} eine Basis von $H_{i-1}(T)$, dann ist $\hat{\mathcal{B}}_i = \{[x - x_0, Z] \mid x \neq x_0 \text{ eine Kegelspitze, } Z \in \mathcal{B}_{i-1}\}$ eine Basis von $H_i(K^m T)$. Also*

$$H_i(K^m T) \cong \bigoplus_{\substack{x \neq x_0 \\ \text{Kegelspitze}}} H_{i-1}(T).$$

Beweis. Wir verwenden hier für die Definition der rationalen reduzierten Homologie die Homologie des Komplexes der Ketten von orientierten Simplizes. Die Menge der orientierten k -Simplizes $S_k^o(T)$ von T ist die Menge der geordneten $(k+1)$ -Tupel (p_0, \dots, p_k) von Ecken modulo folgender Äquivalenzrelation. Zwei $(k+1)$ -Tupel (p_0, \dots, p_k) und (q_0, \dots, q_k) sind äquivalent, wenn es eine Permutation σ von $k+1$ Elementen gibt mit $(p_{\sigma(0)}, \dots, p_{\sigma(k)}) = (q_0, \dots, q_k)$ und $\det(\sigma) = 1$. Die (orientierten) rationalen k -Ketten sind $C_k(T) = \mathbb{Q}[S_k^o(T)] / \sim$, wobei $(p_0, \dots, p_k) \sim -(q_0, \dots, q_k)$, wenn es eine Permutation σ gibt mit $(p_{\sigma(0)}, \dots, p_{\sigma(k)}) = (q_0, \dots, q_k)$ und $\det(\sigma) = -1$. Wir definieren das Differential $\delta_k : C_k(T) \rightarrow C_{k-1}(T)$ durch

$$\delta_k((p_0, \dots, p_k)) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_k),$$

führen den Index k aber nicht weiter in der Notation mit. Es ist bekannt, dass die Homologie des Komplexes

$$\dots \rightarrow C_k(T) \rightarrow C_{k-1}(T) \rightarrow \dots \rightarrow C_0(T) \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0$$

die reduzierte rationale singuläre Homologie von T ist (siehe z.B. Spanier [Spa94]). Der Morphismus $C_0(T) \rightarrow \mathbb{Q}$ bildet hierbei jede Ecke auf 1 ab.

Ist $z = (p_0, \dots, p_k)$ als k -Kette in T , so sei $(x, z) = (x, p_0, \dots, p_k)$ als $(k+1)$ -Kette in $K^m T$. Wir setzen diese Notation linear für beliebige k -Ketten von T fort. Für eine Kegelspitze x und eine Kette $Z \in C_k(K^m T)$ folgt direkt aus der Definition $\delta((x, Z)) = Z - (x, \delta Z)$. Sei $Z \in C_k(K^m T)$ eine Kette, dann hat Z eine Darstellung als

$$Z = \sum_{\substack{x \text{ Kegelspitze} \\ z \in S_{k-1}^o(T)}} \alpha_{x,z}(x, z) + \sum_{z' \in S_k^o(T)} \alpha_{z'} z'.$$

Sei dann $Z_x = \sum_{z \in S_{k-1}^o(T)} \alpha_{x,z} z$ und $Z_r = \sum_{z' \in S_k^o(T)} \alpha_{z'} z'$, so dass $Z = \sum_x (x, Z_x) + Z_r$. Wir definieren für zwei Kegelspitzen x, x' und einen $(k-1)$ -Zykel Z von T einen k -Zykel

$$[x - x', Z] = (x, Z) - (x', Z)$$

und bezeichnen so auch seine Homologiekategorie. Da Z ein Zykel ist, ist auch $[x - x', Z]$ ein Zykel. Die Gleichungen aus Punkt 1 des Lemmas folgen mit dieser Definition unmittelbar.

Fixiere nun eine Kegelspitze x_0 . Wir wollen zeigen, dass für eine Basis $\mathcal{B}_{i-1} = \{Z_j | j = 1, \dots, d\}$ der Homologie $H_{i-1}(T)$ die Homologieklassen der $[x - x_0, Z_j]$ mit $x \neq x_0$ eine Basis von $H_i(K^m T)$ ist. Sei also

$$Y = \sum_{x \text{ Kegelspitze}} (x, Y_x) + Y_r$$

ein beliebiger Zykel in $C_i(K^m T)$. Es gilt dann

$$\delta Y = \sum_x Y_x - \sum_x (x, \delta Y_x) + \delta Y_r = 0.$$

Daraus folgt $(x, \delta Y_x) = 0$ und somit $\delta Y_x = 0$ für alle Kegelspitzen x . Außerdem folgt auch $Y_{x_0} = \delta Y_r - \sum_{x \neq x_0} Y_x$. Man hat nun

$$\begin{aligned} Y - \sum_{x \neq x_0} [x - x_0, Y_x] &= \sum_x (x, Y_x) + Y_r - \sum_{x \neq x_0} (x, Y_x) + \sum_{x \neq x_0} (x_0, Y_x) \\ &= Y_r + (x_0, Y_{x_0}) + \sum_{x \neq x_0} (x_0, Y_x) \\ &= Y_r + (x_0, \delta Y_r). \end{aligned}$$

Da diese Differenz ein Zykel ist, folgt $\delta Y_r + \delta Y_r = 0$. Die Kette Y_r ist also ein i -Zykel von T , und da dann $\delta(x, Y_r) = Y_r$ ist für eine beliebige Kegelspitze x , ist Y_r ein Rand in $C_i(K^m T)$. Die Zykel Y und $\sum_{x \neq x_0} [x - x_0, Y_x]$ sind also homolog. Wir sehen somit, dass die Homologieklassen aus $\hat{\mathcal{B}}_i$ die Homologie

$H_i(K^m T)$ aufspannen.

Wir zeigen nun die lineare Unabhängigkeit von $\hat{\mathcal{B}}_i$. Hat man also einen $(i+1)$ -Zykel Y , mit

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,d \\ x \neq x_0}} \alpha_{x,j}[x - x_0, Z_j] = \delta(Y),$$

so ist zu zeigen, dass $\alpha_{x,j} = 0$ für alle Kegelspitzen $x \neq x_0$ und $j = 1, \dots, d$. Wie oben haben wir wieder

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,d \\ x \neq x_0}} \alpha_{x,j}(x, Z_j) - \sum_{\substack{j=1,\dots,d \\ x \neq x_0}} \alpha_{x,j}(x_0, Z_j) = \sum_x Y_x - \sum_x (x, \delta Y_x) + \delta Y_r.$$

Es folgt dann $(x, \delta Y_x) = \sum_{j=1}^d \alpha_{x,j}(x, Z_j)$ für alle Kegelspitzen $x \neq x_0$. Weil die Z_j eine Basis von $H_{i-1}(T)$ bilden, folgt $\alpha_{x,j} = 0$ für alle $j = 1, \dots, d$ und alle Kegelspitzen $x \neq x_0$. \square

Sei $\bar{\mathcal{T}}^l$ der kleinste abgeschlossene Unterkomplex von \mathcal{T}^l , welcher die maximalen Simplizes $\{gH_\phi \mid g \in H_S\}$ enthält. Bezeichnet $(gH_I)^-$ den Abschluss eines Simplex, so ist $\bar{\mathcal{T}}^l = \bigcup_{g \in H_S} (gH_\phi)^-$.

Lemma 3.11. *Der Unterkomplex $\bar{\mathcal{T}}^l$ ist eine Zusammenhangskomponente von \mathcal{T}^l mit Stabilisator H_S .*

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $\bar{\mathcal{T}}^l$ zusammenhängend ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass alle Ecken in $\bar{\mathcal{T}}^l$ zusammenhängen. Jede Ecke in $\bar{\mathcal{T}}^l$ lässt sich als hH_I mit $I \subsetneq S$ maximal und $h \in H_S$ schreiben. Sei also hH_I eine beliebige Ecke in $\bar{\mathcal{T}}^l$. Sei $J \subsetneq S$ maximal und verschieden von I ($n \geq 3$). Dann ist

$$hH_I < hH_\phi > hH_J,$$

und für alle $g \in H_I$ gilt $hH_I < hgH_\phi > hgH_J$. Nun ist $I \cup J = S$, weil I und J verschieden sind, und damit gilt nach Proposition 3.2 (3) und (4) $H_I H_J = H_S$. Es folgt $\{hgH_J \mid g \in H_I\} = \{gH_J \mid g \in H_S\}$. Die Ecke hH_I ist also mit allen Ecken von verschiedenem Typ in $\bar{\mathcal{T}}^l$ verbunden. Also hängen alle Ecken in $\bar{\mathcal{T}}^l$ zusammen.

Um zu zeigen, dass $\bar{\mathcal{T}}^l$ eine Komponente ist, zeigen wir, dass ein maximales Simplex in $\mathcal{T}^l \setminus \bar{\mathcal{T}}^l$ kein Untersimplex in $\bar{\mathcal{T}}^l$ haben kann. Sei also gH_ϕ ein maximales Simplex in \mathcal{T}^l mit $g \in P_{I_0}$. Gibt es nun ein Untersimplex in $\bar{\mathcal{T}}^l$

$$hH_I < gH_\phi$$

mit $h \in H_S$, so hat man $gH_\phi \subseteq hH_I$. Weil $hH_I \subset H_S$, folgt $g \in H_S$, und damit liegt gH_ϕ in $\bar{\mathcal{T}}^l$.

Um den Stabilisator von \bar{T}^l zu bestimmen, sei hH_I irgendein Simplex in \bar{T}^l , also $h \in H_S$. Sei nun g ein Element aus P_{I_0} mit ghH_I in \bar{T}^l . Da ghH_I Untersimplex des maximalen Simplex ghH_ϕ ist, muss nach obigen Betrachtungen auch ghH_ϕ in \bar{T}^l liegen. Alle maximalen Simplizes in \bar{T}^l sind Teilmenge von H_S , also liegt auch gh in H_S . Es folgt $g \in H_S$. Der Stabilisator von \bar{T}^l ist also eine Teilmenge von H_S . Die andere Inklusion ist trivial. \square

Satz 3.12. *Der Komplex \bar{T}^l ist ein Bouquet von $(n-2)$ -Sphären, es gilt also*

$$H_i(\bar{T}^l) = 0 \text{ für alle } 0 \leq i < n-2 \text{ .}$$

Desweiteren gilt $\dim(H_{n-2}(\bar{T}^l)) = (|\bar{F}| - 1)^{n-1}$.

Beweis. Zunächst definieren wir eine Filtrierung von \bar{T}^l durch abgeschlossene Unterkomplexe. Setze $J_j = \{\tau_1, \dots, \tau_j\} \subseteq S$ und $J_0 = \phi$. Sei $E_j = S \setminus \{\tau_j\}$. Setze nun

$$\bar{T}_j^l = \bigcup_{h \in H_S} (hH_{J_j})^-$$

Es folgt unmittelbar $\bar{T}_{j+1}^l \subsetneq \bar{T}_j^l$, da $H_{J_{j+1}} < H_{J_j}$. Außerdem ist $d_j := \dim(\bar{T}_j^l) = |S \setminus J_j| - 1 = n - 2 - j$. Sei $j < n - 2$. Weil $H_{E_{j+1}}$ maximal unter den H_I ist, ist das Simplex $H_{E_{j+1}}$ eine Ecke in \bar{T}^l , und da $H_{E_{j+1}} < H_{J_j} \in \bar{T}_j^l$, liegt diese Ecke in \bar{T}_j^l . Man hat

$$H_{E_{j+1}} < gH_{J_j} > gH_{J_{j+1}} \text{ für } g \in H_{E_{j+1}},$$

und aus Proposition 3.2 (3) und (4) folgt wegen $J_{j+1} \cup E_{j+1} = S$, dass

$$\{gH_{J_{j+1}} \mid g \in H_{E_{j+1}}\} = \{gH_{J_{j+1}} \mid g \in H_S\}.$$

Die Ecke $H_{E_{j+1}}$ ist also mit allen maximalen Simplizes von \bar{T}_{j+1}^l verbunden. Da \bar{T}_j^l abgeschlossen und jedes Simplex durch seine Ecken bestimmt ist, ist der Komplex $\bigcup_{h \in H_{E_{j+1}}} (hH_{J_j})^-$ der Kegel über \bar{T}_{j+1}^l . Dies gilt für alle Ecken $gH_{E_{j+1}}$ mit $g \in H_S$. Man hat

$$\bar{T}_j^l = \bigcup_{g \in H_S/H_{E_{j+1}}} \bigcup_{h \in gH_{E_{j+1}}} (hH_{J_j})^-.$$

\bar{T}_j^l ist also der $|H_S/H_{E_{j+1}}|$ -fache Kegel über \bar{T}_{j+1}^l . Der Komplex \bar{T}_{n-2}^l ist die disjunkte Vereinigung von $|H_S/H_{E_{n-1}}|$ Punkten. Also ist \bar{T}_{n-2}^l ein Bouquet von $|H_S/H_{E_{n-1}}| - 1$ vielen 0-Sphären. Für die Dimension der reduzierten Homologie gilt

$$\dim(H_0(\bar{T}_{n-2}^l)) = |H_S/H_{E_{n-1}}| - 1.$$

Da ein mehrfacher Kegel über einem Bouquet von i -Sphären ein Bouquet von $i+1$ -Sphären ist, folgt induktiv, dass alle \bar{T}_j^l Bouquets von d_j -Sphären

sind. Insbesondere ist $\bar{\mathcal{T}}^l = \bar{\mathcal{T}}_0^l$ ein Bouquet von $(n-2)$ -Sphären. Weil $\bar{\mathcal{T}}^l$ zusammenhängend ist, hat man $H_0(\bar{\mathcal{T}}^l) = 1_{H_S}$.

Die Menge

$$\{[x-1; z] \mid x \in (H_S/H_{E_{j+1}}) \setminus \{1\}, z \in H_{d_{j+1}}(\bar{\mathcal{T}}_{j+1}^l)\}$$

ist nach Lemma 3.10 eine Basis von $H_{d_j}(\bar{\mathcal{T}}_j^l)$, so dass

$$\dim(H_{d_j}(\bar{\mathcal{T}}_j^l)) = (|H_S/H_{E_{j+1}}| - 1) \cdot \dim(H_{d_{j+1}}(\bar{\mathcal{T}}_{j+1}^l)).$$

Für alle $j = 0, \dots, n-2$ gilt $|H_S/H_{E_{j+1}}| = |\bar{F}|$. Induktiv folgt nun

$$\dim(H_{n-2}(\bar{\mathcal{T}}^l)) = (|\bar{F}| - 1)^{n-1}.$$

□

Man beachte, dass $\bar{\mathcal{T}}^l$ als simplizialer Komplex weder von l noch von I_0 oder a abhängt. Durch die Wahl dieser Parameter bekommt $\bar{\mathcal{T}}^l$ aber verschiedene P_{I_0} -Operationen. Für jede endliche Menge S , und jedes System von Untergruppen H_I von G mit $I \subseteq S$, welches die Aussagen aus Proposition 3.2 erfüllt, hat man eine zu obigem Satz analoge Aussage.

Der Beweis von Satz 3.12 zeigt, dass durch

$$\Psi = \{[x_j - 1]_{j=1, \dots, n-1} \mid x_j \in (H_S/H_{E_j}) \setminus \{1\}\}$$

eine Basis von $H_{n-2}(\bar{\mathcal{T}}^l)$ gegeben ist. Die Gruppe P_{I_0} operiert von links auf den $(n-2)$ -Homologieklassen durch

$$g[x_i - x'_i]_i = [gx_i - gx'_i]_i,$$

und für diese Tupel gelten Komponentenweise die Rechenregeln aus Lemma 3.10.

Korollar 3.13. *Es gilt $S_{I_0, a} = H_{n-2}(\mathcal{T}^l) = \mathrm{ind}_{H_S}^{P_{I_0}} H_{n-2}(\bar{\mathcal{T}}^l)$.*

Beweis. Die Eulercharakteristik von \mathcal{T}^l ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{T}^l) &= \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \sum_{\substack{|I|=n-2-i \\ I \subseteq S}} 1_{H_I}^{P_{I_0}} \\ &= \sum_{I \subseteq S} (-1)^{n-2-|I|} 1_{H_I}^{P_{I_0}} \\ &= (-1)^{n-2} (S_{I_0, a} - (-1)^{n-1} 1_{H_S}^{P_{I_0}}), \end{aligned}$$

und auch

$$\chi(\mathcal{T}^l) = (-1)^{n-2} H_{n-2}(\mathcal{T}^l) + H_0(\mathcal{T}^l).$$

Nach Lemma 3.11 hat man noch $H_0(\mathcal{T}^l) = 1_{H_S}^{P_{I_0}}$. Setzt man dies in obige Gleichung ein und eliminiert man $\chi(\mathcal{T}^l)$ durch Gleichsetzung der beiden Formeln, so erhält man $S_{I_0,a} = H_{n-2}(\mathcal{T}^l)$. Die zweite Gleichheit in der Behauptung folgt auch aus Lemma 3.11 und den Bemerkungen zu induzierten Darstellungen in Abschnitt 1.1. \square

Es sei noch erwähnt, dass man die Aussage von Lemma 3.7 durch Kombination von obigem Korollar und Satz 3.12 wiederentdecken kann.

3.4 Irreduzibilität der Darstellungen $S_{I_0,a}$

Mit Hilfe der Struktur des Komplexes T^l wollen wir nun die Irreduzibilität der P_{I_0} -Darstellungen $S_{I_0,a}$ nachweisen. Man erinnere sich, dass die $S_{S,a}$ die Steinberg-Darstellungen von G^a aufgefasst als Darstellungen von G^l sind. Diese sind alle in $1_{B^l}^{G^l}$ enthalten. Man hat also für jedes Niveau $a \in \mathbb{N}$ eine Steinberg-Darstellung und somit eine ganze Serie von irreduziblen Unterdarstellungen von $1_{B^\infty}^{G^\infty}$. Ferner wollen wir an dieser Stelle noch bemerken, dass die Darstellung $S_{S,l}$ gewissermaßen die top-Komponente von $1_{B^l}^{G^l}$ ist.

Lees bezeichnet in [Lee78] eine andere, virtuelle Darstellung als die verallgemeinerte Steinberg-Darstellung und berechnet einige ihrer Charakterwerte. In der Einleitung erwähnt er gewisse irreduzible top-Komponenten dieser virtuellen Darstellung, und man kann durch einen elementaren Vergleich der Konstruktionen oder mit einer Aussage in [Hil95] und Satz 3.15 sehen, dass die Darstellungen $S_{S,l}$ eben jene Komponenten sind.

Satz 3.14. *Für alle $I_0 \subseteq S$ und $a \in \{2, \dots, l\}$ ist $S_{I_0,a}$ eine irreduzible Darstellung von P_{I_0} . Insbesondere ist St_G eine irreduzible Darstellung von G .*

Beweis. Wir wollen $\langle S_{I_0,a}, 1_{H_\phi}^{P_{I_0}} \rangle = 1$ zeigen. Nach Mackeys Formel gilt

$$\langle S_{I_0,a}, 1_{H_\phi}^{P_{I_0}} \rangle = \langle \text{ind}_{H_S}^{P_{I_0}} H_{n-2}(\bar{\mathcal{T}}^l), 1_{H_\phi}^{P_{I_0}} \rangle = \sum_{v \in H_S \setminus P_{I_0} / H_\phi} \langle H_{n-2}(\bar{\mathcal{T}}^l), 1_{H_\phi} \rangle_{H_S \cap^v H_\phi}$$

Wir benutzen hier Charaktere stellvertretend für ihre Darstellungen.

Für $v = 1$ hat man $H_S \cap^v H_\phi = H_\phi$. Ein Tupel $[x_j - 1]_{j=1, \dots, n-1}$ mit $x_j \in (H_S / H_{E_j}) \setminus \{1\}$ ist Element der Basis Ψ . Sei nun $z = \sum_{[x_j - 1]_j} \alpha_{[x_j - 1]_j} [x_j - 1]_j$ eine Homologieklass aus $H_{n-2}(\bar{\mathcal{T}}^l)$ mit $bz = z$ für alle $b \in H_\phi$. Da $H_\phi \subset H_{E_j}$ für alle $j = 1, \dots, n-1$, ist $b \cdot 1 = 1$ in H_S / H_{E_j} und somit

$$\sum \alpha_{[x_j - 1]_j} [bx_j - 1]_j = bz = z = \sum \alpha_{[x_j - 1]_j} [x_j - 1]_j .$$

Es folgt $\alpha_{[x_j-1]_j} = \alpha_{[bx_j-1]_j}$ für alle $b \in H_\phi$. Durch Diagonalmatrizen mit Einträgen in Repräsentanten von $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ operiert H_ϕ transitiv auf der Basis Ψ . Also folgt, dass alle Koeffizienten von z gleich sind. Der einzige mögliche, für die Operation von H_ϕ triviale Unterraum von $H_{n-2}(\bar{T}^l)$ ist also

$$\left(\sum_{[x_j-1]_j} [x_j - 1]_j \right) \mathbb{Q}$$

und dieser trägt tatsächlich die triviale Darstellung von H_ϕ . Insgesamt folgt für $v = 1$

$$\langle H_{n-2}(\bar{T}^l), 1_{H_\phi} \rangle_{H_S \cap^v H_\phi} = 1 .$$

Nun sei $v \neq 1$. Weiter unten zeigen wir, dass für alle $v \neq 1$ ein $\mu \in \{1, \dots, n-1\}$ und eine Menge U_μ existiert, welche als Teilmenge von P_{I_0} von links transitiv auf der Menge H_S/H_{E_μ} und trivial auf den Mengen H_S/H_{E_j} für $j \neq \mu$ operiert. Wir wollen nun zeigen, dass für jede U_μ enthaltende Gruppe $X \subseteq H_S \cap^v H_\phi$ gilt $\langle H_{n-2}(\bar{T}^l), 1_B \rangle_X = 0$. Wir führen eine neue Schreibweise für die Basisvektoren in Ψ ein:

$$[x_j - 1|x_\mu - 1]_j := [x_0 - 1, \dots, x_\mu - 1, \dots, x_{n-2} - 1]$$

Für $\xi \in U_\mu$ hat man dann

$$\xi[x_j - 1|x_\mu - 1]_j = [x_j - 1|\xi x_\mu - \xi] .$$

Aufgrund der Multilinearität der Homologieklassen (Lemma 3.10) erhält man

$$\xi[x_j - 1|x_\mu - 1]_j = [x_j - 1|\xi x_\mu - 1] - [x_j - 1|\xi - 1] ,$$

wobei man hier ξ als $\xi \cdot 1$ auffasst. Sei nun $z = \sum_{[x_j-1]_j} \alpha_{[x_j-1]_j} [x_j - 1]_j$ eine Homologieklass in $H_{n-2}(\bar{T}^l)$ mit $\xi z = z$ für alle $\xi \in U_\mu$. Wir ermitteln den Koeffizienten von $[x_j - 1|\xi - 1]$ in z . Da $x_\mu \neq 1$ leisten nur die Terme $\alpha_{[x_j-1|x_\mu-1]} [x_j - 1|\xi - 1]$ für alle $x_\mu \in H_S/H_{E_\mu}$ einen Beitrag zu diesem Koeffizienten. Es folgt

$$\begin{aligned} \alpha_{[x_j-1|\xi-1]} &= - \sum_{x \in H_S/H_{E_\mu}} \alpha_{[x_j-1|x-1]} \quad \Rightarrow \\ 2\alpha_{[x_j-1|\xi-1]} &= - \sum_{\substack{x \in H_S/H_{E_\mu} \\ x \neq \xi \cdot 1}} \alpha_{[x_j-1|x-1]} \end{aligned}$$

für alle $\xi \in U_\mu$. Dieses Gleichungssystem hat dann nur die Lösung $\alpha_{[x_j-1|\xi-1]} = 0$ für alle $\xi \in U_\mu$. Für diese Folgerung ist es notwendig, dass wir Darstellungen auf Vektorräumen über einem Körper der Charakteristik null betrachten. Die $x_j \neq 1$ waren beliebig, so dass insgesamt alle Koeffizienten von z null sind. Schließlich gilt

$$\langle H_{n-2}(\bar{T}^l), 1_{H_\phi} \rangle_X = 0$$

und dann auch

$$\langle H_{n-2}(\bar{T}^l), 1_{H_\phi} \rangle_{H_S \cap v H_\phi} = 0 .$$

Aus der Bruhat-Zerlegung von G^1 folgt, dass jede Doppelnebenklasse BvB in P_{I_0} einen Repräsentanten der Form $v = wk$ mit $w \in W_{I_0}$ und $k \in P_{I_0} \cap K_1$ besitzt. Ohne Einschränkung kann man k in K_1^- annehmen. Da $B \subseteq H_\phi \subseteq H_S$ hat auch jede Doppelnebenklasse $H_S v H_\phi$ einen Repräsentanten dieser Form. Um den Beweis zu beenden, genügt es nun für jedes $v = wk \notin H_S$ ein U_μ wie oben beschrieben zu finden. Für $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ definiere

$$U_{i,j} = \{(u_{r,s}) \in G \mid u_{rr} = 1 \text{ und } u_{r,s} = 0 \text{ falls } r \neq i \text{ oder } s \neq j\}.$$

Falls $w \neq 1$ ist, gibt es $U_{i,j} \subseteq H_\phi$ und $\mu \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $i < j$ und ${}^w U_{i,j} = U_{\mu+1,\mu}$. Setze $\bar{U}_{i,j} = U_{i,j} \cap K_{a-1}$ und $\bar{U}_{\mu+1,\mu} = U_{\mu+1,\mu} \cap K_{a-1}$. Mit entsprechenden nilpotenten Matrizen N und M kann man $k^{-1} = 1 + \pi N$ und $u = 1 + \pi^{a-1} M$ für ein $u \in \bar{U}_{i,j}$ schreiben. Es gilt $k^{-1}u - uk^{-1} = \pi^a(NM - MN)$. Weil nun $\bar{U}_{i,j} \subseteq P_{I_0} \cap K_{a-1}$ und nach Voraussetzung auch $k \in P_{I_0} \cap K_1$ ist, gilt ${}^{k^{-1}}\bar{U}_{i,j} \subseteq P_{I_0} \cap K_a \subseteq H_\phi$. Man hat also $\bar{U}_{\mu+1,\mu} \subseteq H_S \cap {}^{wk}H_\phi$. Man sieht an der Definition, dass $\bar{U}_{\mu+1,\mu} \subseteq X_\mu$ ist. Die Elemente in $X_\mu X_j$ kommutieren bis auf Elemente in $K_a \cap P_{I_0}$ (vgl. Beweis von Lemma 3.1) und $K_a \cap P_{I_0} \subseteq H_{E_j}$ für alle j . Da $\bar{U}_{\mu+1,\mu}$ ein Repräsentantensystem von H_S/H_{E_μ} ist, operiert $\bar{U}_{\mu+1,\mu}$ transitiv auf H_S/H_{E_μ} , und weil für $j \neq \mu$ auch $\bar{U}_{\mu+1,\mu} \subseteq H_{E_j}$, operiert $\bar{U}_{\mu+1,\mu}$ trivial auf H_S/H_{E_j} . Kommen wir zu dem Fall $w = 1$.

Für eine standard parabolische Untergruppe P_I von G hat man eine Levi-Zerlegung $P_I = M_I U_I$ mit unipotenter Untergruppe U_I und Levi-Gruppe $M_I \cong \prod \text{Gl}_{n_i}(\mathcal{O}_I)$. Es gibt eine standard parabolische Untergruppe P von $\text{Gl}_n(F)$, die unter Einschränkung auf $\text{Gl}_n(\mathcal{O})$ und anschließender Projektion nach G^i auf P_I abgebildet wird. Das unipotente Radikal und die standard Levi-Untergruppe von P gehen dabei auf U_I und M_I . Ist w_0 das längste Element von W , so sei $U_I^- = {}^{w_0}U_I$ (vgl. Lees[Lee78]). Bezeichne die $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ -Bewertung von \mathcal{O}_I , die sich aus der normalisierten Bewertung von \mathcal{O} ableitet, auch mit v .

Seien $k_{i,j}$ die Koeffizienten der Matrix k , sei $b = \min_{i,j} \{v(k_{i,j})\}$ und wähle λ und μ so, dass $\lambda - \mu$ maximal ist mit $v(k_{\lambda,\mu}) = b$. Merke, dass $b < a$, da sonst $k \in H_S$. Betrachte erst den Fall $\lambda > \mu + 1$. Modifiziere k durch Multiplikation von rechts und links mit Matrizen aus B , so dass $k_{\lambda,\mu+1} = k_{\lambda,\mu}$ und $k_{i,\mu+1} = k_{\lambda,j} = 0$ für $i < \lambda$ und $j > \mu + 1$. Wähle eine maximale standard parabolische Untergruppe $P_I = M_I U_I$ von G , so dass $U_{\mu+1,\lambda} \subseteq U_I$. Es folgt $U_{\mu,\lambda} \subseteq U_I$. Es gibt dann $u \in U_I^-$ und $k' \in P_I$ mit $k = uk'$. Man hat $u = 1 + M$ mit einer nilpotenten Matrix $M \neq 0$. Weil P_I maximal war, ist $M^2 = 0$ und

damit $(1 + M)^{-1} = (1 - M)$. Setze

$$\begin{aligned} z &= 1 + \gamma\pi^{a-1-b}E_{\mu+1,\lambda} \text{ mit } \gamma \in \mathcal{O}_l, \\ t &= \gamma\pi^{a-1-b}k_{\mu+1,\lambda} \sum_{\substack{\theta=1 \\ \theta \neq \lambda \\ \theta \neq \mu+1}}^n E_{\theta,\theta} \end{aligned}$$

wobei $E_{i,j}$ die Matrix ist, welche an der Stelle (i, j) eine Eins und an jeder anderen Stelle eine Null hat. Setze $U_\mu = {}^k\{k'^{-1}(t+z)k' | \gamma \in \mathcal{O}_l\}$. Es liegt z für jedes $\gamma \in \mathcal{O}_l$ in U_I . Das Element $k' \in P_I$ normalisiert U_I und $t \in K_{l-1}$ kommutiert mit k, k' und u . Daher liegt $z' = k'^{-1}(t+z)k'$ in $B \subseteq H_\phi$. Man berechnet

$$kz'k^{-1} = t + uzu^{-1} = t + z + \gamma\pi^{a-1-b}(ME_{\mu+1,\lambda} - E_{\mu+1,\lambda}M - ME_{\mu+1,\lambda}M).$$

Weil $v(m_{i,\mu+1}) > b$ für $i > \lambda$ und $m_{i,\mu+1} = 0$ für $i < \lambda$ ist $\gamma\pi^{a-1-b}ME_{\mu+1,\lambda}$ eine Spaltenmatrix, die an der Stelle (λ, λ) den Eintrag $\gamma\pi^{a-1-b}k_{\mu+1,\lambda}$ hat und sonst in der Spalte λ ausschließlich mit Werten aus \mathfrak{p}^a besetzt ist. Da P_I maximal gewählt war ist dann $\pi^{a-1-b}ME_{\mu+1,\lambda}M = 0$. Die Zeilenmatrix $\gamma\pi^{a-1-b}E_{\mu+1,\lambda}M$ hat den Eintrag $\gamma\pi^{a-1-b}k_{\mu+1,\lambda} \in \mathfrak{p}^{a-1}$ sowohl an der Stelle $(\mu+1, \mu)$ als auch an der Stelle $(\mu+1, \mu+1)$ und sonst in der Zeile $\mu+1$ nur Einträge aus \mathfrak{p}^a . Man kann also schreiben $t + uzu^{-1} = t'xx'k''$ mit $t' = \text{diag}(\gamma\pi^{a-1-b}k_{\mu+1,\lambda})$ im Zentrum von G und $x \in U_{\mu+1,\mu}$, $x' \in U_{\mu+1,\lambda}$ und $k'' \in K_a \cap P_{I_0}$. Man sieht elementar, dass x' für alle j mit den Elementen aus $U_{j+1,j}$ kommutiert bis auf Multiplikation einer Matrix aus B von rechts. Da $k'' \in K_a \cap P_{I_0}$ normal in P_{I_0} und t' zentral in G ist, operiert die Matrix $t + uzu^{-1}$ also als x auf H_S/H_{E_j} für alle j . Sie operiert dann trivial auf H_S/H_{E_j} für $j \neq \mu$ und transitiv auf H_S/H_{E_μ} wenn γ alle Elemente aus \mathcal{O}_l durchläuft.

Kommen wir zum Fall $\lambda = \mu + 1$. Wähle μ nun zusätzlich maximal mit $v(k_{\mu+1,\mu}) = b$. Es ist $\mu \notin I_0$, da $k \in P_{I_0}$. Falls $b = a - 1$, folgt aus der Wahl von (λ, μ) , dass dann $k \in H_S$. Diesen Fall haben wir ausgeschlossen. Also ist $b < a - 1$. Setze

$$z = 1 + \sum_{\theta > \mu} \gamma\pi^{a-1-b}E_{\theta,\theta} \text{ mit } \gamma \in \mathcal{O}_l \text{ und}$$

$U_\mu = {}^k\{z | \gamma \in \mathcal{O}_l\}$. Es gilt $k \in K_b$, also $k = 1 + \pi^b M$ für eine strikte untere Dreiecksmatrix M . Man berechnet

$$kz = zk + \gamma\pi^{a-1}(M \sum E_{\theta,\theta} - \sum E_{\theta,\theta}M).$$

Da $b + a - 1 \geq a$, ist mit einer Matrix $k'' \in P_{I_0} \cap K_a$

$$kzk^{-1}k'' = z + \gamma\pi^{a-1}(M \sum E_{\theta,\theta} - \sum E_{\theta,\theta}M).$$

Weil $v(\pi^b m_{ij}) > b$ für $j > \mu$ nach Wahl von μ , ist $\pi^{a-1} M \sum E_{\theta, \theta}$ eine Spaltenmatrix mit Einträgen in \mathfrak{p}^a . Außerdem hat man $v(\pi^b m_{i,j}) > b$ für $i > \mu + 1$ und $v(\pi^b m_{\mu+1,j}) > b$ für $j < \mu$. Daher ist $\gamma \pi^{a-1} \sum E_{\theta, \theta} M$ eine Zeilenmatrix mit Eintrag $\gamma \pi^{a-1} m_{\mu+1, \mu}$ an der Stelle $(\mu+1, \mu)$ und Einträgen in \mathfrak{p}^a im Rest der $(\mu+1)$ -ten Zeile. Der rechte Summand der rechten Seite obiger Gleichung ist also in H_S enthalten. Es folgt $kzk^{-1} \in H_S$. Sei $x(a)$ die Matrix in $U_{\mu+1, \mu}$ mit Eintrag a an der Stelle $(\mu+1, \mu)$. Dann sieht man $kzk^{-1} = x(\gamma k_{\mu+1, \mu} \pi^{a-1-b}) z \tilde{k}$ mit einer Matrix $\tilde{k} \in P_{I_0} \cap K_a$. Weil $P_{I_0} \cap K_a$ normal in P_{I_0} ist, operiert \tilde{k} trivial auf H_S/H_{E_j} für alle j . Da z eine Diagonalmatrix in K_1 ist operiert z trivial auf $X_\mu H_\phi/H_\phi$. Für $x \in X_j$ mit $j \neq \mu$ gilt sogar $zx = xz$, weswegen z auch auf allen anderen H_S/H_{E_j} trivial operiert. Damit operiert $x(\gamma k_{\mu+1, \mu} \pi^{a-1-b})$ trivial auf H_S/H_{E_j} für $j \neq \mu$ und transitiv auf H_S/H_{E_μ} , wenn γ alle Werte in \mathcal{O}_l durchläuft. \square

3.5 Hills verallgemeinerte Steinberg-Darstellung

Sei jetzt $F = \mathbb{Q}_p$. Wir wollen nun zeigen, dass die Darstellung St_G isomorph zu einer von Hill definierten Steinberg-Darstellung von G ist. Dazu definieren wir zunächst einen verallgemeinerten Gelfand-Graef-Charakter (s. Hill [Hil95] Definition 5.4).

Sei U die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale, und seien $e_{i,j}$ die Matrizen mit einer Eins in der i -ten Zeile in der j -ten Spalte und sonst ausschließlich Nullen. Sei dann $U_{i,j}$ die Gruppe der Matrizen der Form $I + ae_{i,j}$ mit $a \in \mathbb{Z}/p^l$. Man hat einen Isomorphismus $a \mapsto I + ae_{i,j}$ von der additiven Gruppe \mathbb{Z}/p^l nach $U_{i,j}$. Nach Lemma 2.5 in [loc. cit.] ist $U/[U, U] \cong \prod_{i=1}^{n-1} U_{i,i+1}$. Jeder lineare Charakter auf U ist also durch seine Einschränkungen auf $U_{i,i+1}$ bestimmt. Sei θ ein linearer Charakter auf U , dann sei $\theta_i = \theta|_{U_{i,i+1}}$. Der Charakter θ heißt *nicht-degeneriert*, wenn θ_i als Charakter von \mathbb{Z}/p^l aufgefasst nicht über \mathbb{Z}/p^{l-1} faktorisiert für alle $i = 1, \dots, n-1$. Sei nun θ ein nicht degenerierter linearer Charakter von U . Der Charakter

$$\Gamma_\theta = \text{ind}_U^G \theta$$

heißt der *verallgemeinerte Gelfand-Graef-Charakter* zu θ . In [Hil95] zeigt Hill, dass die Isomorphieklasse von Γ_θ nicht von der Wahl von θ abhängt und mit 1_B^G nur eine gemeinsame irreduzible Komponente hat. Diese nennt er die Steinberg-Darstellung von G . Wir bezeichnen diese Komponente zunächst mit St'_G .

Satz 3.15. *Die Darstellung St'_G ist isomorph zu St_G .*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass St'_G in St_G enthalten ist. Mit $a = l$ genügt es nach Proposition 3.6 zu zeigen, dass St'_G nicht in den $1_{H_i}^G$ für

$i = 1, \dots, n-1$ enthalten ist. Man hat

$$\langle \Gamma_\theta, 1_{H_i}^G \rangle = \langle \mathrm{ind}_U^G \theta, 1_{H_i}^G \rangle = \sum_{x \in U \backslash G/H_i} \langle \theta, 1_{H_i} \rangle_{U \cap x H_i}.$$

Aus der Bruhat-Zerlegung für G^1 folgt, dass jede Doppelnebenklasse UgB einen Repräsentanten der Form kw hat mit $w \in W$ und $k \in K_1$. Da $H_i \supseteq B$, hat auch jede Doppelnebenklasse von $U \backslash G/H_i$ einen Repräsentanten dieser Form. Man hat ${}^{kw}H_i \supseteq {}^{kw}(H_i \cap K_{l-1}) = {}^w(H_i \cap K_{l-1})$, weil K_{l-1} zentral in K_1 ist. Sei $w \neq w_0$ das längste Element in W . Dann gibt es $i < j$ mit ${}^w U_{i,j} = U_{k,k+1}$ für ein k , denn sonst würde w^{-1} alle einfachen Wurzeln auf negative Wurzeln abbilden und dann wäre $w = w^{-1} = w_0$. Es gilt also $U_{k,k+1} \cap K_{l-1} \subseteq U \cap {}^{kw}H_i$. Man hat

$$\langle \theta_k, 1_{H_i} \rangle_{U_{k,k+1} \cap K_{l-1}} = 0 \quad ,$$

da θ_k nicht degeneriert, also nicht trivial auf K_{l-1} ist. Sei nun $w = w_0$. Da $X_i = U_{i+1,i} \cap K_{l-1} \subset H_i$, ist $U_{i,i+1} \cap K_{l-1} \subset U \cap {}^{w_0}H_i$. Genau wie im Fall $w \neq w_0$ folgt dann auch hier $\langle \theta_k, 1_{H_i} \rangle = 0$. \square

Literatur

- [Bou75] BOURBAKI, N.: *Groupes et algebres de Lie IV–VI*. Hermann, 1971–1975
- [Bro96] BROWN, K.: *Buildings*. Springer, 1996
- [BT65] BOREL, A. ; TITS, J.: Groupes réductifs. In: *Publ. Math. IHES* 27 (1965)
- [Car85] CARTER, R. W.: *Finite groups of Lie type*. John Wiley & Sons, 1985
- [Cha98] CHAO, Ku: A new proof of the Solomon-Tits theorem. In: *Proceedings of the AMS* 126(7) (1998), S. 1941–1944
- [CL82a] CURTIS, G.I. ; LEHRER, C.W.: Homology representations of finite groups of Lie type. In: *Contemporary Math.* 9 (1982)
- [CL82b] CURTIS, G.I. ; LEHRER, C.W.: A new proof of a theorem of Solomon-Tits. In: *Proceedings of the AMS* 85(2) (1982), S. 154–156
- [Gar73] GARLAND, H.: p -adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p -adic groups. In: *Ann. of Math.* 97(2) (1973), S. 375–423
- [Hil95] HILL, G.: Regular Elements and Regular Characters of $\mathrm{Gl}_n(\mathcal{O})$. In: *Journal of Algebra* 174 (1995), S. 610–635
- [Knu01] KNUDSON, K. P.: *Homology of Linear Groups*. Birkhäuser, 2001
- [Lee78] LEES, P.: A Steinberg Representation for $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$. In: *Proc. London Math. Soc.* 37 (1978), S. 459–490
- [Lus74] LUSZTIG, G.: *The discrete series of Gl_n over a finite field*. Princeton University Press, 1974
- [May99] MAY, J. P.: *A Concise Course in Algebraic Topology*. The University of Chicago Press, 1999
- [Qui75] QUILLEN, D.: Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers. In: *Lecture Notes in Mathematics* Bd. 341. Springer, 1975
- [Sol69] SOLOMON, L.: The Steinberg character of a finite group with BN -pair. In: BRAUER, R. (Hrsg.) ; SAH, C.H. (Hrsg.): *Theory of Finite Groups*, Benjamin, 1969, S. 213–221

- [Spa94] SPANIER: *Algebraic Topology*. Springer, 1994
- [Spr98] SPRINGER, T. A.: *Linear Algebraic Groups*. Birkhäuser, 1998
- [Sus81] SUSLIN, A.: On the equivalence of K -Theories. In: *Comm. Alg.* 9(15) (1981), S. 1559–1566
- [Vol71] VOLODIN, I. A.: Algebraic K -theory as extraordinary homology theory on the category of associative rings with unity. In: *Math. of the USSR-Izvestija* 5(4) (1971)
- [Wag75a] WAGONER, J. B.: Buildings, Stratifications and higher K -Theory. In: *Lecture Notes in Mathematics* Bd. 341. Springer, 1975, S. 148–165
- [Wag75b] WAGONER, J.B.: Homotopy Theory for the p -adic Special Linear Group. In: *Comment. Math. Helvetici* 50 (1975)
- [Wag77] WAGONER, J. B.: Equivalence of algebraic K -Theories. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 11 (1977), S. 245–269
- [Wei94] WEIBEL, C. A.: *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, 1994