

Stefan Schlie

Die Idee der Änderung –der Ableitungsbegriff



Pädagogische Gesichtspunkte

Aufgabenstellung	Darstellung	Dokumentation
Experimentell Anwendung Geführt	Graphisch Tabellarisch Numerisch	Heft: Datei Mündliche Präsentation

Technologie

Tabellen- kalkulation	Graphischer Taschenrechner	Computeralgebra- system	Dynam. Geo- metriesoftware
	X	X	

Ziele und Beschreibung der Einheit

- Auswerten einer realen Messreihe
- Unterscheiden zwischen der „Durchschnitts-“ und der „Momentangeschwindigkeit“ und Interpretation als „durchschnittliche“ und „momentane Änderungsrate“ auf der Basis eines intuitiven Grenzwertbegriffs
- Entwickeln von Strategien zur Berechnung der Momentangeschwindigkeit
- (Entwickeln eines Verständnisses, wie das Messsystem „Momentangeschwindigkeiten“ berechnet)

Rolle der Technologie

Medium

- zum Experimentieren
- zum Rechnen
- zum Visualisieren
- zum Überprüfen

Rechner als Black-Box

Notwendige Vorkenntnisse

- Durchschnittsgeschwindigkeit, s-t-Diagramm
- Arbeiten mit Listen
- Die Menüs Y=, TABLE, TBLSET, GRAPH, WINDOW
- Intervallschachtelung

Dauer der Einheit

4 - 6 Unterrichtsstunden

Unterrichtsorganisation

- Partnerarbeit, Gruppenarbeit
- Vortragen der Lösungsstrategien u.a. mithilfe des View-Screens

Aufgabenstellungen

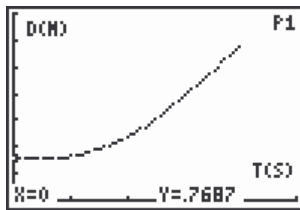
Vor der Klasse wird die Startphase eines Fahrradfahrers mithilfe eines Schall-Bewegungsdetektors (CBR) aufgezeichnet.

Der CBR misst den Zeitraum zwischen dem Absenden des Ultraschallimpulses und der Ankunft des ersten Echos. Des Weiteren wird während der Messung aus der Schallgeschwindigkeit und des Zeitraums die Entfernung des Objektes vom CBR errechnet.

1. Beschreiben Sie den Bewegungsablauf.
2. Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit zu einem von Ihnen gewählten Zeitpunkt.
3. Ermitteln Sie einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Zeit und der Momentangeschwindigkeit.
Vergleichen Sie mit dem Ergebnis, das das Messsystem anbietet.

Lösungsvorschläge (speziell für einen Graphikrechner, den TI-83)

Zu 1:



TIME	DIST	██████	B
0	.7687		
.03226	.7689		
.06451	.76929		
.09677	.76972		
.12902	.77019		
.16128	.77082		
.19354	.77173		

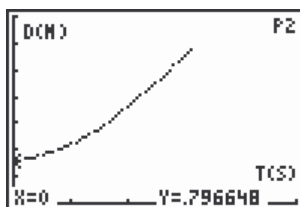
Name=□

Der Radfahrer entfernt sich nach einer kurzen Standphase mit fortschreitender Zeit immer mehr von der Wand, der Graph verläuft streng monoton steigend. Dabei wird die Geschwindigkeit immer größer, da der Graph linksgekrümmt ist, bzw. hier immer steiler wird.

Zu 2:

VTIME	VDIST	██████	10
0	.79665		
.03226	.80534		
.06451	.81579		
.09677	.82802		
.12902	.84196		
.16128	.8576		
.19354	.87481		

Name=□



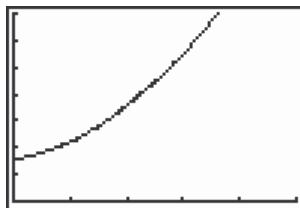
Um quantitative Aussagen über die Geschwindigkeit des Radfahrers zu treffen, ist die Standphase nicht interessant, da dort $v=0$ m/s ist. Für die weitere Vorgehensweise wird deshalb der Graph entsprechend nach links so verschoben, dass der Radfahrer zum Zeitpunkt des Starts losfährt.

Die nicht benötigten Listenwerte können innerhalb des Programms RANGER über das PLOT-Menü gelöscht werden. Außerhalb des RANGER-Programms müssen die Listenwerte einzeln im LISTEN-Menü gelöscht werden.

Vorüberlegungen:

- Entwicklung eines Verständnisses von der Momentangeschwindigkeit
- Abgrenzung zur Durchschnittsgeschwindigkeit
- Berechnung einiger Durchschnittsgeschwindigkeiten zwischen zwei Messpunkten, dabei sollten die Messpunkte beliebig ausgesucht werden
- Strategie zur Berechnung einer Momentangeschwindigkeit
- Rechnerische Bestimmung der Momentangeschwindigkeit durch Einschachtelung mittels Durchschnittsgeschwindigkeiten
- Das Einschachtelungsverfahren lässt sich nur dann durchführen, wenn man eine Funktionsgleichung hat, die die ermittelten Messdaten hinreichend gut modelliert

```
QuadReg
y=ax2+bx+c
a=.6370521227
b=.3600358605
c=.7778464234
R2=.9993796498
```



L1	L2 #	L3 # 2
0	.99709	2.2712
.5	1.3156	1.9527
.9	1.5704	1.6978
.99	1.6278	1.6405
.999	1.6335	1.6348
.9999	1.6341	1.6342
.99999	1.6341	1.6341
L2(7) = 1.63413374		

L2 #	L3 #	L4 3
.99709	2.2712	2
1.3156	1.9527	1.5
1.5704	1.6978	1.1
1.6278	1.6405	1.01
1.6335	1.6348	1.001
1.6341	1.6342	1.0001
1.6341	1.6341	1
L3(7) = 1.63414648		

Zum Auffinden einer Ausgleichskurve bietet der TI-83 mehrere mögliche Funktionstypen an. Legt man eine ganzrationale Funktion zugrunde, ist zunächst die quadratische Funktion als Regressionskurve ausreichend.

Die Gleichung wird unter Y1 im Y-Fenster abgespeichert.

Die Startphase des Radfahrers kann also hinreichend gut durch die Funktion s mit

$s(t)=0,64t^2+0,36t+078$ beschrieben werden.

Einschachtelung zur Bestimmung der Momentangeschwindigkeit z.B. zum Zeitpunkt $t = 1s+0,39s=1,39s$ (Verschiebung um $0,39s$)

Eingabe von

- Werten in L1, die von unten gegen 1 konvergieren;
- Werten in L4, die von oben gegen 1 konvergieren;
- $\frac{(Y1(1)-Y1(L1))}{(1-L1)}$ in die Statuszeile von L2;
- $\frac{(Y1(L4)-Y1(1))}{(L4-1)}$ in die Statuszeile von L3.

In L2 wird die zugehörige Folge der Durchschnittsgeschwindigkeiten von links gegen $t=1s$, in L3 die zugehörige Folge der Durchschnittsgeschwindigkeiten von rechts gegen $t=1s$ berechnet.

Auswertung:

Die Durchschnittsgeschwindigkeiten in den Listen L2 und L3 konvergieren von unten bzw. von oben gegen denselben Wert von ca. $1,63$.

Die Werte in L2 und L3 liefern eine Intervallschachtelung. Es ist sinnvoll, den Grenzwert als gesuchte Momentangeschwindigkeit festzulegen.

Die Geschwindigkeit des Radfahrers zum Zeitpunkt $t = 1s$ (bzw. wegen der Verschiebung $1,39s$) beträgt ca. $1,63m/s = 5,87km/h$.

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)1-10^-n
u(nMin)1
v(n)1+1/n^2
v(nMin)1
w(n)=
w(nMin)=
    
```

In L1 und L4 können auch andere Folgenterme eingegeben werden, deren Folgen gegen 1 konvergieren.

L1	L2	L3
.9	1.5704	2.2712
.99	1.6278	1.6596
.999	1.6335	1.642
.9999	1.6341	1.6379
.99999	1.6341	1.6363
1	1.6341	1.6356
1	1.6341	1.6352

L1 = "u(1,7,1)"

Dabei zeigt sich, dass die Durchschnittsgeschwindigkeiten in den Listen L2 und L3 erneut gegen den Wert 1,63 konvergieren.

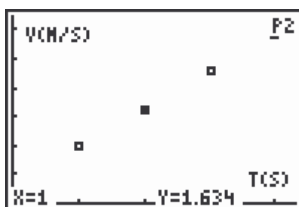
L2	L3	L1
1.5704	2.2712	2
1.6278	1.6596	1.04
1.6335	1.642	1.0123
1.6341	1.6379	1.0059
1.6341	1.6363	1.0035
1.6341	1.6356	1.0023
1.6341	1.6352	1.0016

L4 = "v(1,28,4)"

L5	L6	7
.5	.997	
1	1.634	
1.5	2.271	
2	2.908	
-----	-----	

Name=

Nach dem gleichen Muster werden weitere Momentangeschwindigkeiten (L6) zu bestimmten Zeitpunkten (L5) berechnet.

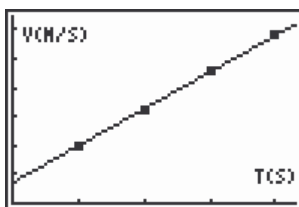


Die graphische Darstellung lässt vermuten, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Zeit und der Momentangeschwindigkeit besteht.

```

LinReg
y=ax+b
a=1.274
b=.36
r^2=1
r=1
    
```

Der TI-83 bringt folgende Regression hervor: $v(t)=1,274t+0,36$.



Nachdem der Begriff der Beschleunigung geklärt wird, kann festgehalten werden, dass bei dieser Startphase des Radfahrers die Beschleunigung annähernd konstant ca. $a=1,3m/s^2$ beträgt.

Der Vergleich der Funktionsgleichungen von s und v bereitet die Ableitungsregel für Potenzfunktionen vor: $s(t)=0,64t^2+0,36t+0,78$, $v(t)=1,274t+0,36$.

Zu 3:

VTIME	VDIST	VVEL 10
.83861	1.5236	1.5303
.87086	1.5738	1.5766
.90311	1.6255	1.6205
.93536	1.6784	1.6615
.96761	1.7325	1.6996
.99986	1.7878	1.7381
1.0321	1.8442	1.7653

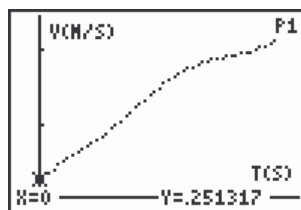
VVEL(32) = 1.73437

L1	L2 #	L3 # 2
0	.99003	1.7406
.5	1.3672	1.8983
.9	1.6603	1.7764
.99	1.716	1.7277
.999	1.7213	1.7225
.9999	1.7219	1.722
.99999	1.7219	1.7219

L2(7) = 1.72190614

L2 #	L3 #	L4 3
.99003	1.7406	2
1.3672	1.8983	1.5
1.6603	1.7764	1.1
1.716	1.7277	1.01
1.7213	1.7225	1.001
1.7219	1.722	1.0001
1.7219	1.7219	1

L3(7) = 1.7219178

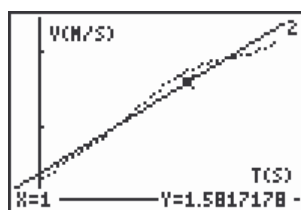


Das Messsystem CBR liefert ca. $v=1,734\text{m/s}$ als Momentangeschwindigkeit. Das entspricht einer prozentualen Abweichung von der vorher errechneten Momentangeschwindigkeit von ca. 5,8%.

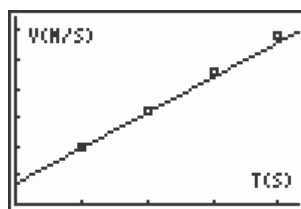
Dieser Fehler kann weiter minimiert werden, wenn keine quadratische Ausgleichskurve zugrunde gelegt wird.

Wird mithilfe des TI-83 der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades durch die Messpunkte gelegt, ergibt sich durch Einschachtelung von Durchschnittsgeschwindigkeiten ein Wert von $v=1,722\text{m/s}$.

Das CBR liefert die nebenstehende Messkurve für den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Momentangeschwindigkeit.

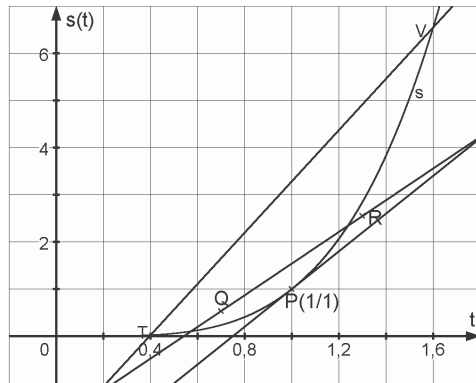


Eine lineare Regression ergibt $v(t)=1,223t+0,358$.



Es zeigt sich, dass diese Ausgleichsgerade auch als Ausgleichsgerade für den mittels TI-83 erarbeiteten Zusammenhang zwischen der Zeit und den errechneten Momentangeschwindigkeiten herangezogen werden kann.

Zuletzt soll hier kurz erläutert werden, wie das CBR-Messsystem zu den Werten für die Momentangeschwindigkeit gelangt.



Gegeben ist ein Weg-Zeit-Diagramm. Die Steigung der Tangente in P stimmt mit dem Wert der Momentangeschwindigkeit überein.

Das CBR-Messsystem ermittelt die Steigung der Geraden durch Q und R und nähert damit die Momentangeschwindigkeit an.

Für die Koordinaten von Q gilt: $y_Q = \frac{1}{2}(y_T + y_P)$, $x_Q = \frac{1}{2}(x_T + x_P)$.

Entsprechend für R: $y_R = \frac{1}{2}(y_P + y_V)$, $x_R = \frac{1}{2}(x_P + x_V)$.

Rechnerisch ergibt sich:

$$v(t_P) \approx \frac{0,5 \cdot (s(t_V) + s(t_P)) - 0,5 \cdot (s(t_P) + s(t_T))}{t_V - t_P} = \frac{s(t_R) - s(t_Q)}{0,5 \cdot (t_V - t_T)}$$

Didaktisch-methodische Hinweise

Die Einführung des Begriffs „Ableitung“ geschieht hier und im weiteren Unterrichtsverlauf, der hier nicht näher ausgeführt wird, auf der Basis eines intuitiven Grenzwertbegriffs seitens der Schüler.

Wichtig ist des weiteren, dass die beiden Geschwindigkeitsbegriffe mit dem Begriff der „Änderung“ korrekt verzahnt werden. Dieser Einstieg basiert auf die Einführung des Ableitungsbegriffs über die lokale Änderung.

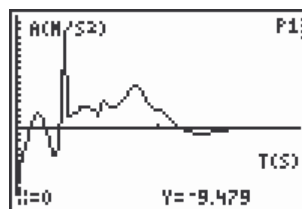
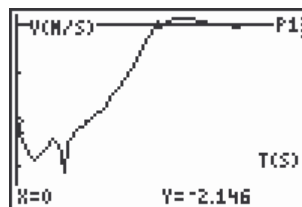
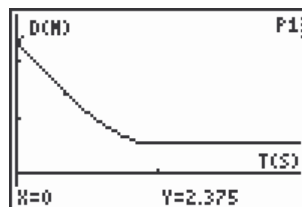
Das Messprinzip des CBR sollte unbedingt vor den Schülern vorgeführt werden. Die zu untersuchende Messreihe kann dann unter Umständen außerhalb des Unterrichts aufgenommen werden. Dabei ist es sehr wichtig, dass keine störenden Einflüsse in Form von reflektierenden Gegenständen im Messbereich des CBR liegen. Der Vorteil der Aufnahme einer Bewegung mithilfe des CBR liegt in der Verfügbarkeit für die Schüler. Die Messwerte können schnell zur weiteren Auswertung auf alle Schülerrechner übertragen werden. Auch ist es positiv zu sehen, dass mit diesem Messsystem netzunabhängig gearbeitet werden kann.

Die Verschiebung des s-t-Graphen ist dann wünschenswert, wenn mithilfe dieser Messreihe auch die Ableitungsregel für Potenzfunktionen vorbereitet werden soll. Dann ist aufgrund der Regressionsgleichungen eher ein Zusammenhang zu erkennen.

Zusätzliche Aufgaben

Untersuchung des Bremsverhalten eines Radfahrers vor einer (Reflexions)wand. So kann z.B. der Frage nachgegangen werden, wie groß der Bremsweg des Radfahrers ist.

Die folgenden Kurvenverläufe wurden mithilfe des CBR-Messsystems erstellt.



Das Weg-Zeit-Diagramm lässt im ersten Augenblick erahnen, dass die Geschwindigkeit im ersten Augenblick nahezu konstant ist. Im weiteren Verlauf wird sie geringer, die Kurve ist linksgekrümmt. Nach knapp einer Sekunde steht der Radfahrer still.

Diese Beschreibung wird durch das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm annähernd bestätigt. Im ersten Bereich ist die Geschwindigkeit nicht so konstant wie zu vermuten war; die Schwankungen liegen aber in einem tolerierbaren Bereich. Anschließend nimmt die Geschwindigkeit ungefähr linear bis auf einen Wert von ca. 0m/s ab.

Das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm lässt weiteren Raum für Diskussionen zu.

Literaturhinweise

- [1] Keunecke, K.-H.(o. J.), Computerunterstützter Physikunterricht, Materialien von Texas Instruments
- [2] Materialien der Gruppe AMMuNT Weser-Ems