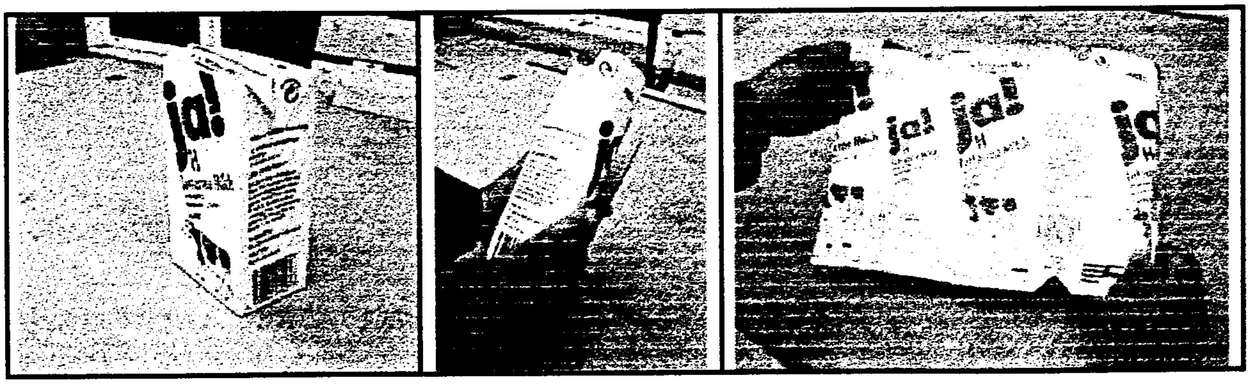
Die H-Milchtüte

Problem:	Getränkeverpackungen sind industrielle Massenprodukte, die nach Gebrauch entsorgt werden müssen. Läßt sich bei der Herstellung vielleicht Material sparen ?

Vorüberlegungen:

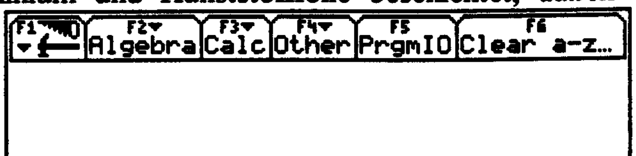
Die Bearbeitung des Problems soll sich an der handelsüblichen Getränkeverpackung orientieren. Man wird zunächst einmal untersuchen müssen, wie ein solche Verpackung hergestellt ist. Dazu wird eine leere Verpackung an den Klebefalzen vorsichtig aufgetrennt und auseinandergeklappt:



Dabei stellt man fest, daß ein Rechteck entsteht. Die weitere Untersuchung ergibt: die Verpackung ist auf der Innenseite mit Aluminium und Kunststofffolie beschichtet, außen bedruckt und gewachst.

Wenn die Maße verändert werden sollen, um Material zu sparen, dann soll das Volumen der Verpackung natürlich konstant bleiben. Dazu werden die Werte gemessen:

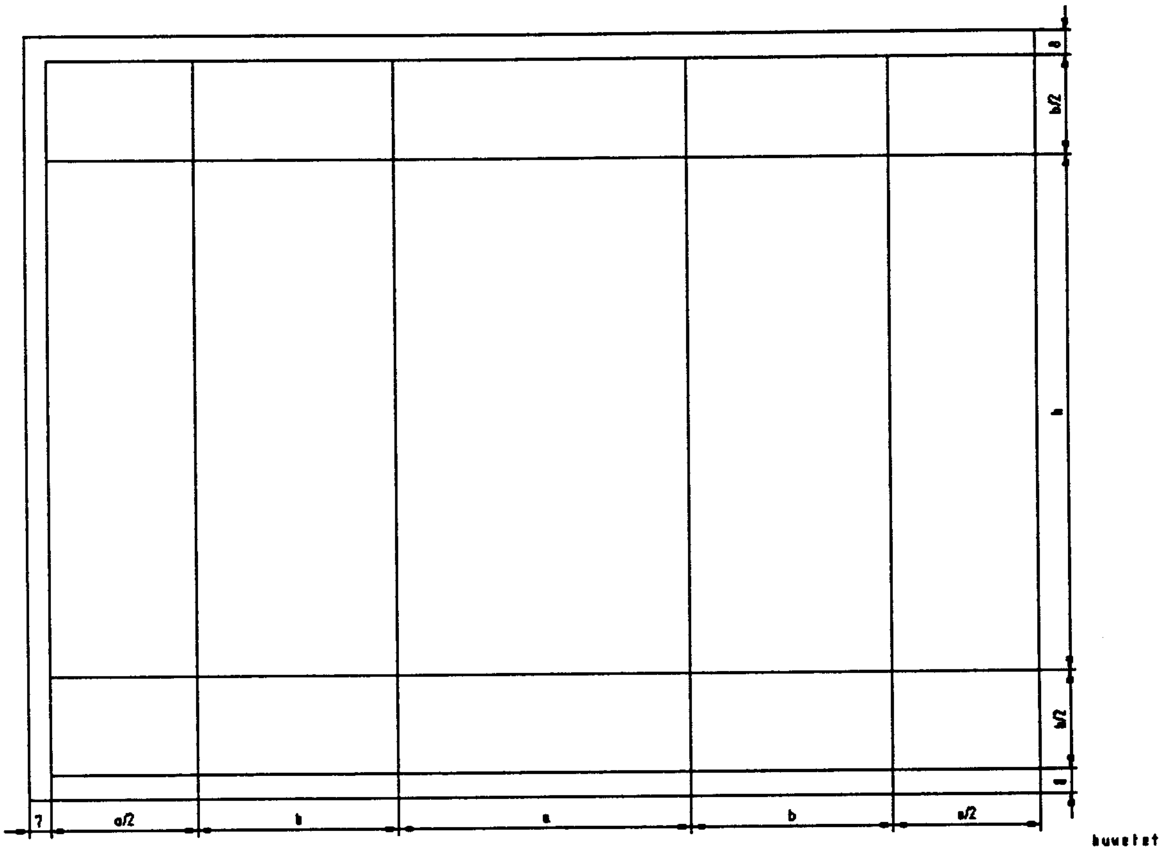
Breite	9.45 cm
Tiefe	6.2 cm
Höhe	16.6 cm



Das Produkt der drei Werte ist weniger als 1000 cm^3 !! Das muß natürlich diskutiert werden (wird der Verbraucher vielleicht im großen Stil betrogen?) Für die weiteren Überlegungen wird dieser Wert nicht mehr verändert und unter dem Namen v gespeichert: (Taste STO>). Damit läßt sich eine der Größen a, b, h durch die anderen ersetzen:

$$h = \frac{v}{a \cdot b}$$

Man wird sich auch darauf verständigen, daß die Klebefalze (0.7 cm bzw.0.8cm) aus produktionstechnischen Gründen nicht mehr verändert werden dürfen.

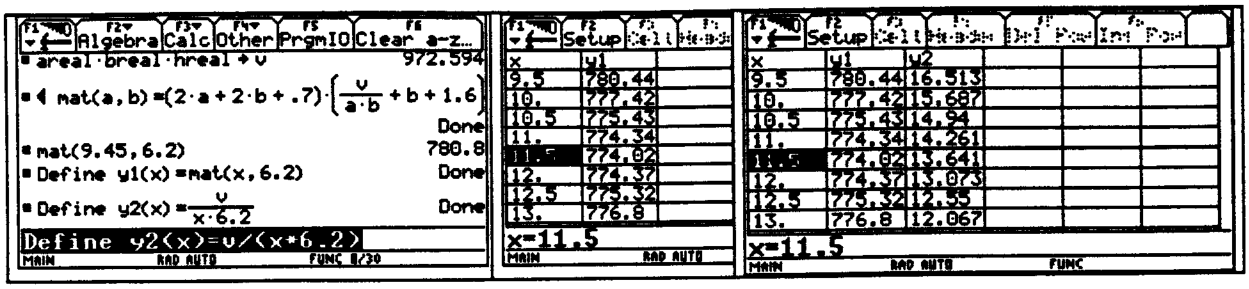


Lösungsskizze 1.Teil

Wir definieren uns zunächst mit `F4 Define` die Funktion zur Berechnung des Materials und setzen dann die Werte 9.45 für a und 6.2 für b ein, um die Größe des Rechtecks, aus dem die reale Milchtüte hergestellt ist, zu bestimmen (780.2 cm^2)

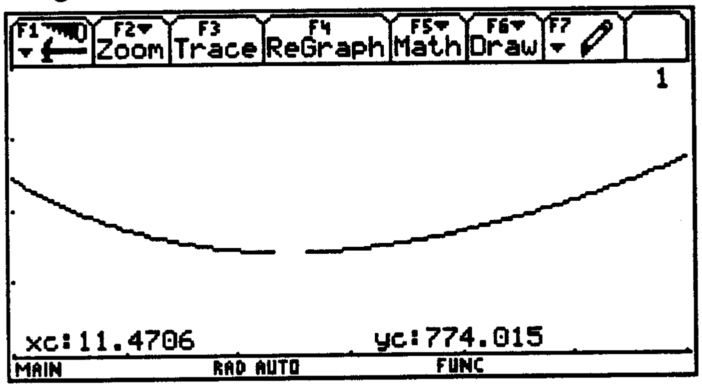
$$mat(a,b) = (2a + 2b + 0.7)(\frac{v}{a \cdot b} + b + 1.6)$$

In einem ersten Anlauf lassen wir b=6.2 konstant und verändern nur a , dabei definieren wir die Funktion y1 . (Die Funktion y2 liefert den Wert für h).
Mit `TABLE` lassen wir die Funktion in Form einer Wertetabelle darstellen.

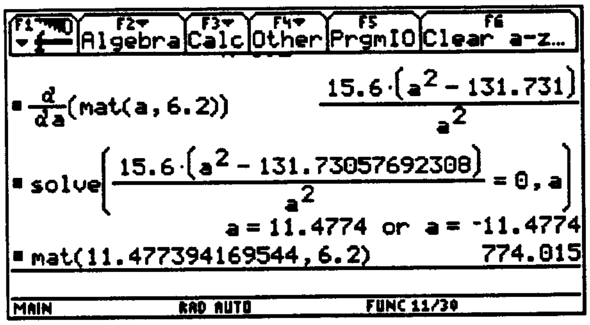


(Die Darstellung einer definierten Funktion wird ein- oder ausgeschaltet mit `Y=` und `F4`)

Ergebnis der Arbeit mit der Tabelle:
Durch Veränderung der Abmessungen läßt sich tatsächlich eine Reduzierung des Materialbedarfs erreichen !
Die Funktion hat offensichtlich ein Minimum, dieses muß in der Nähe von 11.5 liegen.
Wir bestimmen über `WINDOW` einen passenden Bereich schauen uns mit `GRAPH` den Funktionsgraphen an. Mit Hilfe der `TRACE`-Funktion können wir die Lage des Minimums präzisieren.



Unsere Kenntnisse aus der Analysis erlauben eine rechnerische Bestimmung des Minimums über die Nullstelllen der 1.Ableitung.



Mit dem Befehl d(differentiate im Menü `Calc` können wir unsere Funktion mat(a,6.2) nach a ableiten. Die rechnerische Bestimmung liefert keine weitere Verminderung des Materialbedarfs.

Mit a=11.48 , b=6.2 und h=13.66 haben wir die optimalen Abmessungen ermittelt.

Bei diesen Überlegungen haben wir zunächst einmal b=6.2 nicht verändert. Hier muß jetzt weitergearbeitet werden (Evtl. müssen definierte Variablen mit `DelVar` im Menü `F4` wieder gelöscht werden). Dabei bieten sich verschiedene Wege an:

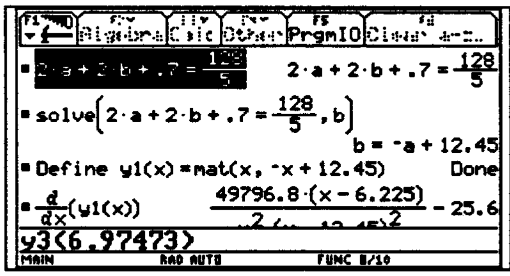
- b wird wieder konstant gehalten, aber mit anderen Werten, (dabei ist ein arbeitsteiliges Vorgehen denkbar.)
- Wir halten a=11.48 konstant und suchen den optimalen Wert für b, variieren dann a.

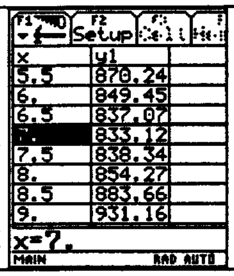
Lösungsskizze 2.Teil

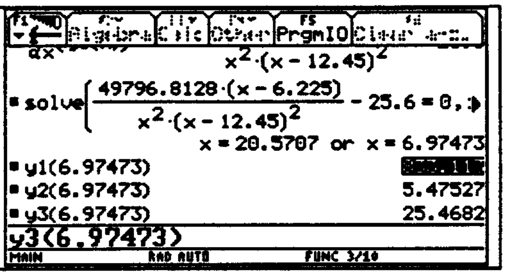
Eine Beobachtung des Herstellungsprozesses (wir haben das Werk der Firma TetraPak in Limburg besucht) liefert weitere wichtige Informationen, die eine Behandlung des Problems beeinflußen können. Das für die Herstellung der Verpackungen nötige Material (Pappe) wird in großen 130 cm breiten Rollen angeliefert und im Werk weiter verarbeitet. In mehreren Arbeitsgängen wird die Pappe gekalkt, mit Alufolie beschichtet, bedruckt, mit Kunststofffolie überzogen und außen gewachst. Zum Schluß werden die Bahnen in Längsrichtung geschnitten, so daß schmale Rollen entstehen, die an die Abfüllbetriebe geliefert werden. Beim Schneiden der 130cm breiten Bahnen wird zunächst auf jeder Seite 1cm abgeschnitten, damit eine glatte Kante entsteht. Für die Herstellung der Verpackungen stehen also

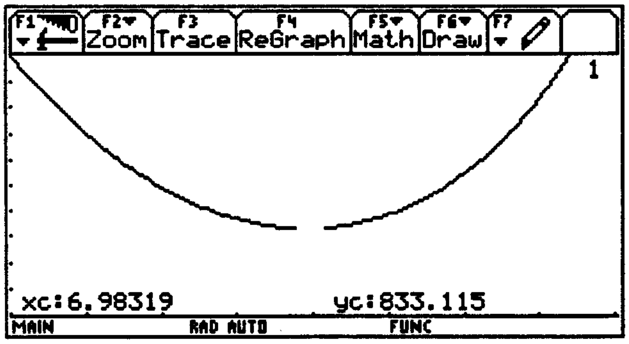
128 cm breite Bahnen

zur Verfügung. Wenn hier ohne Verschnitt gearbeitet werden soll, muß ein ganzzahliges Viel-faches der Rechteckbreite (2a + 2b + 0.7) auf die 128cm breite Bahn passen. Wir ermitteln nun die optimalen Abmessungen, wenn die Rechteckbreite $\frac{128}{5}$ oder $\frac{128}{4}$ oder $\frac{128}{3}$ ist.









Wir lösen zunächst die Gleichung $2a+2b+0.7=\frac{128}{5}$ nach b und definieren die Funktion y1. Diese kann wieder entweder als Tabelle (TABLE) oder grafisch (GRAPH) mit der Trace-Funktion weiter bearbeitet werden. (Die Funktionen y2 und y3 liefern die Werte von b und h :

$$-x+12.45 \text{ bzw. } \frac{v}{x(-x+12.45)}$$

Die Bestimmung des Minimums über die Nullstellen der ersten Ableitung liefert :

a = 6.97 cm b = 5.48 cm h = 25.47 cm

Der Materialbedarf (833.113 cm²) ist allerdings erheblich größer als bei der realen Milchtüte.

Der zweite Versuch (Breite des Rechtecks ist 32 cm wie bei der realen Verpackung) liefert :

a = 9.57 cm b = 6.08 cm h = 16.71 cm

Der optimale Materialbedarf (780.652 cm²) weicht nur geringfügig vom Materialbedarf der realen Milchtüte (780.8 cm²) ab.

Auch im dritten Versuch (3 Rechtecke passen nebeneinander auf die Rolle) liefern die optimalen Abmessungen keine Materialersparnis:

a = 14.80 cm b = 6.18 cm h = 10.63 cm

Der Materialbedarf ist 785.545 cm².

Unter diesen Voraussetzungen ist es also nicht möglich gegenüber der realen Milchtüte durch Veränderung der Abmessungen Verpackungsmaterial einzusparen!

Lösungsskizze 3.Teil

```
#1:  a :∈ Real (0, ∞)
#2:  b :∈ Real (0, ∞)
#3:  v := 972.594
#4:  MAT(a, b) := (2·a + 2·b + 0.7)·[v/(a·b) + b + 1.6]
#5:  d/da [(2·a + 2·b + 0.7)·[v/(a·b) + b + 1.6]]
#6:  d/db [(2·a + 2·b + 0.7)·[v/(a·b) + b + 1.6]]
#7:  b = 6.2250093
#8:  a = 11.457182
#9:  h = 13.635000
#10: MAT(11.457182, 6.2250093) = 774.00836
COMMAND: Schreibe Vereinfache Löse Mult faKt approX Baue Def Einstellung Fenster
         Graphik Analysis zusaTz lösChe Rück schiebe geheZu Übertrage Hilfe eNde
Befehl auswählen                                                      Derive XM
User                      C:\AUFSÄTZE\TI92\HM   Free:100%               Algebra
```

Nun könnte man sich auf den Standpunkt stellen, daß auch die Rollenbreite verändert werden soll, wenn dabei Material eingespart werden kann. Deshalb fragen wir danach, bei welchen Abmessungen für a und b (nur das Volumen soll konstant bleiben) der Materialverbrauch minimal wird. An dieser Stelle bietet sich die Möglichkeit, exemplarisch über partielle Ableitungen und die Verallgemeinerung des Verfahrens zur Berechnung von Extremwerten bei Funktionen von zwei Variablen zu sprechen.

Wir haben zur Lösung DERIVE benutzt:

- Die Ableitung von mat(a,b) nach a wird gleich 0 gesetzt und nach a aufgelöst.
- Die Ableitung von mat(a,b) nach b wird gleich 0 gesetzt und nach a aufgelöst.
- Die beiden (positiven) Lösungen werden gleichgesetzt und die Gleichung wird (nach b) gelöst.
- Mit dem für b berechneten Wert werden a, h und der Materialbedarf bestimmt.

Die optimale Lösung:

a = 11.46 cm b = 6.23 cm h = 13.63 cm

Die minimale Materialbedarf (774.008 cm²) ist nur geringfügig kleiner als bei der realen Verpackung.

Anmerkungen

- Das Problem der Müllbeseitigung ist nach wie vor vorhanden und auch die Frage, ob solche Verpackungen überhaupt verwendet werden sollen, ist nicht beantwortet.
- Bei der behandelten Problemstellung geht es darum, **realitäts**orientierte Fragestellungen im Mathematikunterricht zu behandeln und vielleicht Antworten zu finden.
- Im Unterricht soll mit den realen Objekten und mit den von den Schülern gemessenen Werten gearbeitet werden. Der Einsatz des TI92 erlaubt auch die Verwendung von „nicht bereinigten“ Werten.
- Kennzeichnend für die Arbeit ist eine veränderte Unterrichtskultur: Probieren, gezieltes Experimentieren und Variieren, grafisches Lösen, verschiedene Lösungswege, ...
- Die hier beschriebenen Lösungsskizzen können natürlich beliebig verändert werden.
- Die Untersuchung von anderen Verpackungen ist sinnvoll.

Literatur

[1] H.Böer — Die Milchtüte - Eine Extremwert-Problemstellung aktueller, industrieller Massenproduktion
mathematiklehren 25 (1987) S.40/41

[2] J.Blankenagel/ D.Kindinger — Die H-Milchtüte
Eine Extremwertaufgabe mit verschiedenen Gesichtern
mathematiklehren 29 (1988) S.34-37

[3] G.Fleischer — Aus dem Leben einer Milchtüte... Die Bilanz des Abfalls
Funkkolleg Technik Studienbrief 3 Studieneinheit 10
Tübingen (1994)