Telefongebühren

Themenbereich	
Matritzenrechnung	
Inhalte	Ziele
• Übergangsmatrix, • Gleichgewichtsvektor, Konvergenz von Matrizen • stabiles Gleichgewicht	• Matrizenrechnung bei einem Anwendungsbeispiel aus dem wirtschaftlichen Bereich anwenden können, • Übergangsmatrix, Gleichgewichtsvektor und das Konzept eines stabilen Gleichgewichts an einem Beispiel kennenlernen

Vorüberlegungen

Neben der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor müssen die Schüler/innen keine mathematischen Voraussetzungen mitbringen, um die Aufgabenstellung selbständig in Partner-oder Gruppenarbeit bearbeiten zu können.

Im Zuge der Lösung tauchen Fragen nach Konvergenz von Matrizen, Gleichgewichtsvekor und stabilem Gleichgewicht auf, die im Rahmen des Anwendungsbezuges sehr interessant sind, da damit gezeigt werden kann, dass bestimmte Werbeaktionen letztlich keine Veränderung der Ausgangssituation verursachen. Mathematisch aber ist hierfür ein hohes Leistungskursniveau nötig, da Grundlagen aus der numerischen Mathematik und der linearen Algebra erforderlich sind. Bleibt der TI-92 aber Blackbox in diesem Beispiel, d.h. werden die gelieferten Daten genutzt, ohne sie mathematisch exakt zu fundieren, ist die Aufgabe durchaus auch in einem Grundkurs lösbar.

Aufgabe

In einer mittelgroßen stadt gibt es 40000 Haushalte mit einem Fernsprechanschluß und 1000 Haushalte ohne Telefonanschluß.

Die Telefongesellschaft (z.B. Telekom) unterscheidet insgesamt zwischen vier Gruppen von Haushalten:

- Kunden, die immer pünktlich bezahlen, und deshalb keinen Zahlungsrückstand haben (Gruppe kR),
- Kunden mit wenig Zahlungsrückstand (Gruppe wR),
- Kunden, deren Zahlungsrückstand bereits so groß ist, daß der Telefonanschluß befristet gesperrt ist (Gruppe gR) und
- die 1000 Haushalte ohne Anschluß (Gruppe oA).

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt gibt es 30000 zuverlässige Haushalte (Gruppe kR), 7000 mit wenig Zahlungsrückstand (wR), 3000 gesperrte (Gruppe gR) und 1000 ohne Anschluß (Gruppe oA).
In jedem Quartal erhalten die 40000 Haushalte mit Telefonanschluß ihre Quartalsrechnung mit den Gebühren für Anschluß und Gesprächseinheiten. Nach einer solchen Abrechnung verändern sich die Gruppen wie folgt:

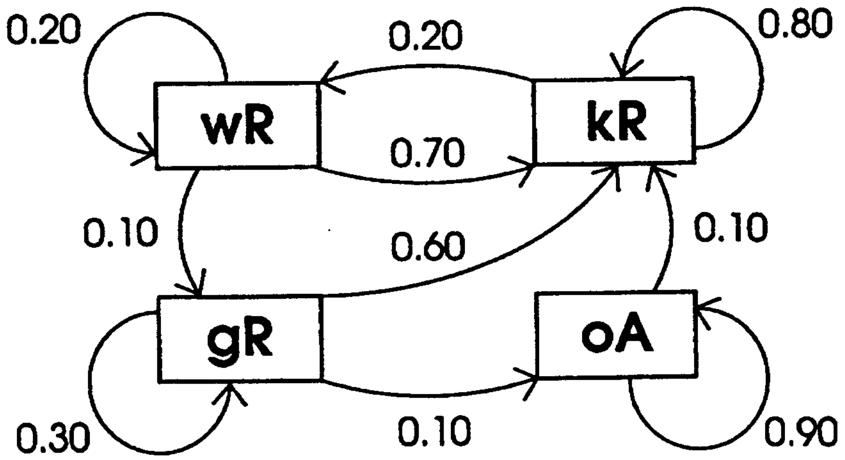
In der Gruppe kr (kein Zahlungsrückstand)
- bezahlen 80% auch dieses Mal wieder direkt (bleiben in der Gruppe kR)
- begleichen 20% die Rechnung nicht sofort und kommen so in die Gruppe wR (wenig Zahlungsrückstand)

Von den Haushalten aus der Gruppe wR (wenig Zahlungsrückstand)
- begleichen diesmal 70% ihre Schuld und gehören damit wieder zu der Gruppe der zuverlässigen Kunden, die keinen Zahlungsrückstand haben (Gruppe kR),
- bleiben 20% in der Gruppe wR und
- bei 10% der Haushalte wird der Zahlungsrückstand so groß, daß der Telefonanschluß gesperrt wird (Gruppe gR)

Auch bei den bereits gesperrten Haushalten verändert sich bei der Quartalsabrechnung das Bild:
- 60% dieser Gruppe bezahlen ihre Schulden und gehören damit zur Gruppe kR,
- 30% bleiben gesperrt (Gruppe gR)
- 10% kündigen den Vertrag und gehören dann zur Gruppe oA

Von den Hasuhalten ohne Anschluß (Gruppe oA)
- bekommen pro Quartal 10% einen neuen Anschluß und gehören dann zur Gruppe kR,
- bleiben 90% ohne Telefonanschluß

Diese Informationen sind in der folgenden Grafik zusammengefasst:



Man will wissen, wie sich die Zahlungsprobleme in der Zukunft verändern:

1

Die einzelnen Übergänge nach der Quartalsabrechnung lassen sich in einer Matrix (der sogenannten "Übergangsmatrix" t) erfassen. Lesen Sie die Zahlen in der Graphik ab und geben Sie sie nach folgendem Schema in den Rechner ein. Warum ist die Summe der Elemente einer Spalte 1?

		VON			
		kR	wR	gR	oA
N	kR				
A	wR				
C	gR				
H	oA				

2

Wie sehen die Zahlungsprobleme in den nächsten Quartalen aus? Werden sich die Zahlen auf ein Mittelmaß einpendeln? Wieviele Haushalte werden ungefähr in Gruppe kR sein? Wieviele werden in Gruppe wR, gR und oA sein?

3

Betrachten Sie auch Potenzen der Matrix t. Was können Sie erkennen? Wie hängt dies mit den Erkenntnissen, die Sie aus 2 gewonnen haben, zusammen?

4

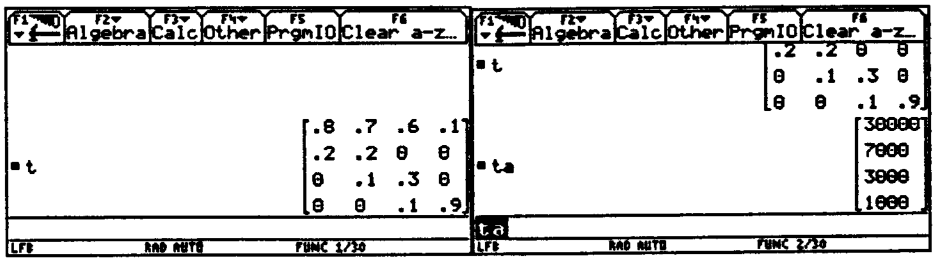
Um die Zahlungsprobleme besser in den Griff zu bekommen, erlässt die Telefongesellschaft auf einmal alle Schulden. Danach gibt es dann 40000 Haushalte in Gruppe kR und 1000 Haushalte ohne Anschluss.
Wie wird der Effekt dieses Schuldenerlasses nach einigen Jahren sein?

5

Die Telefongesellschaft entscheidet sich für eine neue Geschäftspolitik, um die Leute zum schnelleren Zahlen zu bewegen. Sie beschließt, die Anschlüße von Haushalten mit wenig Zahlungsrückstand (Gruppe wR) schneller zu sperren. Eine Folge davon ist, dass es bei gleichen Startbedingungen nach der ersten Abrechnung nur noch 5% Haushalte mit wenig Zahlungsrückstand gibt, dafür aber 25% befristet gesperrte (Gruppe gR).
Welche Folge hat diese neue Geschäftspolitik?

Lösungsskizze

1



2

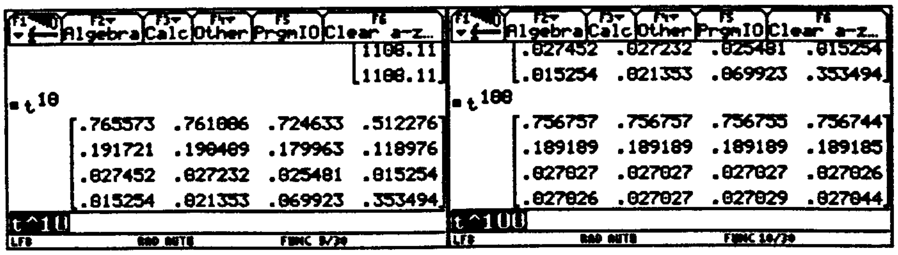
t · ta = [30800,7400,1600,1200]
t^2 · ta = [30900,7640,1220,1240]
t^3 · ta = [30924,7708,1130,1238]
t^4 · ta = [30396.5,7726.4,1109.8,1227.2]
t^{100} · ta = [31027,7756.76,1108.11,1108.11]
t^{200} · ta = [31027,7756.76,1108.11,1108.11]

Es pendelt sich auf ein Gleichgewicht ein, das Ergebnis verändert sich irgendwann (anscheinend) nicht mehr. Man nennt den entstandenen Vektor „Gleichgewichtsvektor".
An dieser Stelle ist es sicher interessant, auch die mathematischen Hintergründe zu betrachten, was jedoch ein gewisses Leistungsniveau der Lerngruppe voraussetzt.
Man kann zum Beispiel auf die Frage eingehen, was ein Gleichgewichtsvektor ist. Hier wäre der Gleichgewichtsvektor g derjenige Vektor g:= [kR,wR,gR,oA], für den:

- kR+wR+gR+oA=41000
- t · g = g

Natürlich lässt sich aufgrund der zweiten Bedingung g berechnen und mit dem vorher vermuteten Vektor vergleichen (Achtung: singuläre Matrix, da det(t)=0.).
Im Regelfall wird dies den schulischen Stoff übersteigen, da man zudem auf Konvergenz von Matrizen und damit auf Eigenwerte und gegebenenfalls auch Kern einer Marix eingehen muss.

3

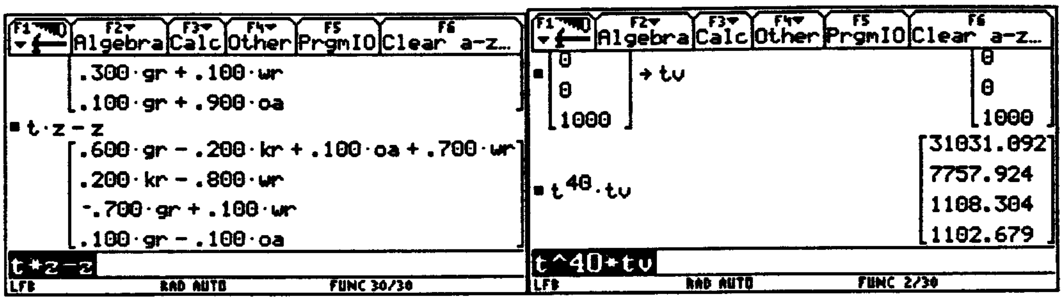


Auch hier erkennt man ein Gleichgewicht, d.h. die Matrix t^n konvergiert gegen eine „Grenz-Matrix". Mathematisch interessant wäre hier, die Eigenwerte der Grenz-

Matrix z betrachten (ein Eigenwert ist 1 und die anderen sind kleiner als 1, womit die Voraussetzungen für die Konvergenz gegeben sind). Jedoch für den Unterricht ist insbesondere hervorzuheben, dass der Grenzwertprozess von 2 unmittelbar mit diesem zusammenhängt.

4

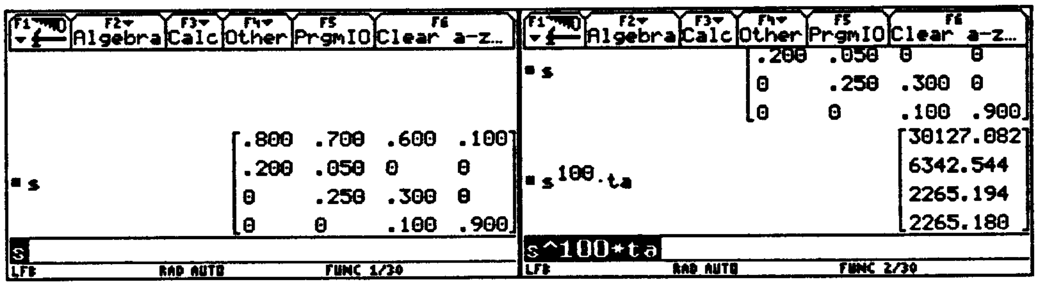
Der Anfangsvektor wird verändert und gespeichert als tv : [40000;0;0;1000]



Es besteht kaum ein Unterschied zu vorher!

5

Damit liegt eine neue „Übergangsmatrix“ vor, hier genannt s:



Die neue Geschäftspolitik erreicht gegenüber dem vorher erzielten Mittelmass eine Abnahme in Gruppe kR und wR und eine Zunahme in den Gruppen gR und oA und ist damit nicht empfehlenswert.

Es sollte herausgestellt werden, dass das Verändern des Anfangsvektors das Gleichgewicht nicht beeinflusst, aber das Verändern der Übergangsmatrix sehr wohl.

Weiterführung der Sequenz

Gegebenenfalls Ausbau der mathematischen Hintergründe mit der Fragestellung, wie die Anfangsbedingungen aussehen müssen, damit ein stabiles Gleichgewicht entsteht.

Zum mathematischen Hintergrund (von Detlef Berntzen)

Offenbar konvergiert die Folge $(A_n)_{n=1,2,...}$ gegen eine Matrix A_0. Diese Grenzmatrix hat einige besondere Eigenschaften:

a) die Spaltensumme ist stets 1;

b) die Zeilen sind Vielfache des Vektors, dessen Koordinaten sämtlich Einsen sind, besitzen also nur konstante Einträge.

Wie kommen diese Eigenschaften zustande?

Die Eigenschaft a) ergibt sich aus der entsprechenden Eigenschaft der Matrix A, was wiederum Ausdruck der Tatsache ist, daß A den Bestandsübergang bei konstantem Kundenstamm beschreibt. Diese Eigenschaft setzt sich natürlich auf A^2, A^3,...fort, denn diese Matrizen beschreiben gleichfalls Bestandsübergänge bei konstantem Kundenstamm. Diese Eigenschaft überträgt sich stetig auf die Grenzmatrix.

Die Eigenschaft b) ergibt sich aus folgender Überlegung:

Ist A_0 die Grenzmatrix von A^n, so gilt

$$A_0 = \lim A^n = \lim A\ A^{n-1} = A \lim A^{n-1} = A\ A_0$$

Insbesondere gilt:

$$A\,A_0 - A_0 = (A - Id)\,A_0 = 0$$

D.h. entweder ist $A_0 = 0$, was aber wegen Eigenschaft (a) nicht geht (!), oder die Spalten von A_0 sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1 von A.

Insbesondere folgt aus der Konvergenz von $(A^n)_n \rightarrow A_0$, daß A den Eigenwert 1 besitzt.

Man sieht auch unmittelbar, daß A den Eigenwert 1 besitzt. Denn A^T, die zu A transponierte Matrix, hat die gleichen Eigenwerte wie A, insbesondere ist der Vektor, dessen Komponenten aus Einsen besteht, ein Eigenvektor (wegen Eigenschaft a).

Bei zufällig gewählten Matrizen wird die Dimension des Eigenraums von A zum Eigenwert 1 stets 1 sein. Es gibt also eine Basis des Eigenraums aus einem Vektor.
Schränken wir die Wahl des Basisvektors auf solche ein, die komponentenweise ≥ 0 und deren Spaltensumme gerade1 ist, so erhalten wir genau einen Vektor a_0. Somit wird die Matrix A_0 aus den Spalten $(a_0, a_0, a_0, a_0,...)$ zusammengesetzt sein. Insbesondere sind die Zeilen der Matrix A_0 konstant.

Diese Überlegung zeigt im übrigen, wie man den Grenzmatrix rein algebraisch (und somit mit finiten Methoden) bestimmen kann, nämlich durch die Tatsache, daß v Element des Kerns der Matrix A-Id und die Koordinatensumme von v konstant ist.

Nehmen wir an, wir hätten eine quadratische Matrix A, die diagonalisierbar ist. D.h. es existiert eine quadratische Matrix S mit

$$A = S^{-1} D S$$

und die Matrix D hat Diagonalgestalt. Die Diagonalkoeffizienten seien mit d_i bezeichnet.

Dann konvergiert die Folge $(A^n)_n$ genau dann, wenn die Folge $(D^n)_n$ konvergiert. Dies geschieht aber genau dann, wenn die Folgen $(d_i^n)_n$ für alle i konvergieren. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn

$$d_i = 1$$

oder $d_i < 1$

Die Grenzmatrix D_0 der Folge $(D^n)_n$ besitzt dann auf ihrer Diagonalen nur Einsen oder Nullen,
wobei die Zahl der Einsen von D der Vielfachheit des Eigenwerts 1 von A entspricht.

Insbesondere ist:

$$A_0 = S^{-1} D_0 S$$

der Grenzwert der Folge $(A_n)_n$, und - wie man sich leicht überlegt - mit finiten Methoden berechenbar!