Hans-Georg Weigand, Rainer Heinrich

Stochastik

Inhalte	Ziele
• Stabilwerden relativer Häufigkeiten • Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen, • Simulation von Zufallsversuchen mit TI-92 • Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Zufallsversuchen • Binomialverteilung	• Einfache Zufallsversuche auf dem Rechner simulieren können • Mit Hilfe mathematischer Modelle Probleme lösen lernen • Erkennen der Beziehung der Analysis zum Lösen stochastischer Aufgaben

Voraussetzungen im Umgang mit dem TI-92:

- Beherrschung der Grundfunktionen des Gerätes (HOME, Y=, GRAPH, WINDOW-Modus, Aufrufen des Programm- und Table - Editors)
- Kenntnis bzw. Erarbeiten von einfacher Programmierung: IF - THEN - ELSE , FOR - Anweisung
- Erzeugen von Zufallszahlen mit rand(x)
- Plotten von Punkten mit PtOn x,y

Arbeitsblatt

Aufgabe 1: Der Besitzer eines Würfelstandes denkt sich zwei neue Varianten von Würfelspielen aus: Es wird mit zwei roten und einem grünen Spielwürfel gleichzeitig gewürfelt.

Variante a)
Die Summe der Augenzahlen der roten Würfel wird durch die Augenzahl des grünen Würfels dividiert.

Variante b)
Das Produkt der Augenzahlen der roten Würfel wird durch die Augenzahl des grünen Würfels dividiert.

Frage 1: Die Gewinnchance des Spielers soll höchstens ein Drittel betragen.
Wie muß jeweils ein Wert z für diese Berechnungen festgelegt werden, so daß der Spieler gewinnt, wenn der nach Variante a) bzw. b) berechnete Wert größer als z ist?

Frage 2: Wie viele Würfe muß ein Spieler bei Variante a mindestens durchführen, damit die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einen Gewinn zu erzielen, größer als 95% ist?

Lösungsvorüberlegungen:

Wir betrachten zunächst nur die beiden roten Spielwürfel. Folgende Werte kann die Zufallsgröße X: 'Summe der Augenzahlen' annehmen.

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Werte-paare	1;1	1;2	1;3	1;4	1;5	1;6	2;6	3;6	4;6	5;6	6;6
		2;1	2;2	2;3	2;4	2;5	3;5	4;5	5;5	6;5	
			3;1	3;2	3;3	3;4	4;4;	5;4	6;4		
				4;1	4;2	4;3	5;3	6;3			
					5;1	5;2	2;6				
						6;1					
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Hier gilt: $P(X > 8) = \frac{10}{36} \approx 0{,}2778$. $P(X > 7) = \frac{15}{36} > \frac{1}{3}$.

Lösung: (Frage 1)

Das Aufsuchen der Zahl z ist aufwendig, deshalb soll der Zufallsversuch hier simuliert werden.
Die Abschätzung des Wertebereichs für z führt zu folgenden Intervallen:

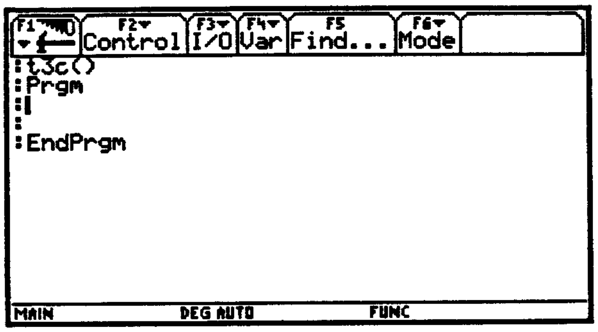
a) kleinster Wert: $\frac{1+1}{6} = \frac{1}{3}$ größter Wert: $\frac{6+6}{1} = 12$

b) kleinster Wert: $\frac{1 \cdot 1}{6} = \frac{1}{6}$ größter Wert: $\frac{6 \cdot 6}{1} = 36$

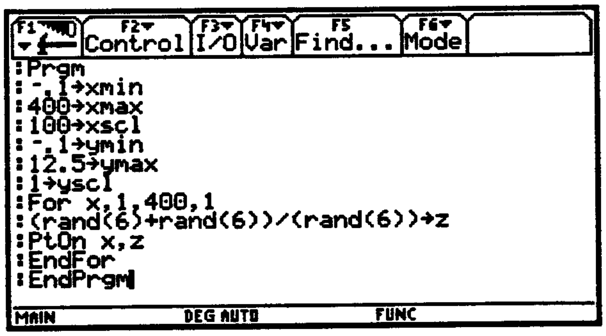
Zunächst soll die tatsächliche Werteverteilung für 400 Würfe mit Hilfe eines TI-92 - Programms simuliert werden.

Im Programm wird der Befehl rand(x) verwendet (Menu `MATH; Probability`). Er erzeugt eine ganzzahlige Zufallszahl im Intervall [0; x].

Zum Schreiben des Programms muß der Programm-Editor aufgerufen werden (`APPS, 7, new`).
Als Variable ist der Name des Programms festzulegen, z.B. 't3c'. Nach zweimaliger Bestätigung durch `ENTER` erscheint das Gerüst für das zu schreibende Programm.

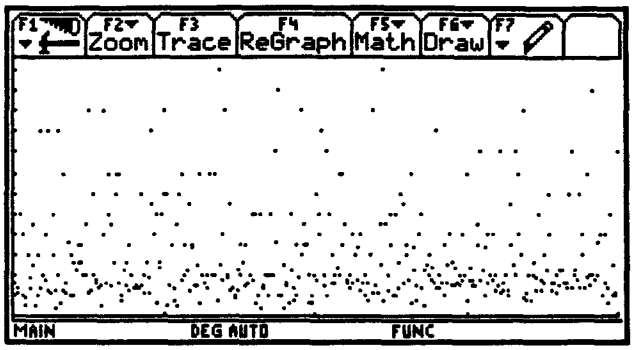


:t3c()	Programmname (durch Autor festgelegt)
:Prgm	Programmbeginn, erscheint automatisch
:-.1 → xmin	Einstellen des Fensters für die graphische Darstellung
:400 → xmax	$-0.1 \le x \le 400$; $-0.1 \le y \le 12.5$
:100 → xscl	Einteilung der x-Achse in 100ter Schritten, der y-Achse
:-.1 → ymin	in 1er Schritten
:12.5 → ymax	
:1 → yscl	
:For x,1,400,1	Beginn einer Schleife für x=1 bis x=400 in Einerschritten
:(rand(6)+rand(6))/rand(6) → z	Die Summe zweier Zufallszahlen (von 0 bis 6) wird durch eine weitere Zufallszahl (von 0 bis 6) dividiert und der berechnete Wert unter z gespeichert.
:PtOn x,z	In der graphischen Darstellung wird der Punkt mit den Koordinaten (x;z) eingetragen (näherungsweise).
:EndFor	Ende der Schleife (erscheint automatisch)
:EndPrgm	Ende des Programms



Mit (♦ HOME) kehrt man zum Ausgangsbildschirm zurück.

Der Start des Programms erfolgt, indem man in der Eingabezeile den Programmnamen mit geschlossener Klammer eingibt und mit ENTER bestätigt, z.B. t3c() .



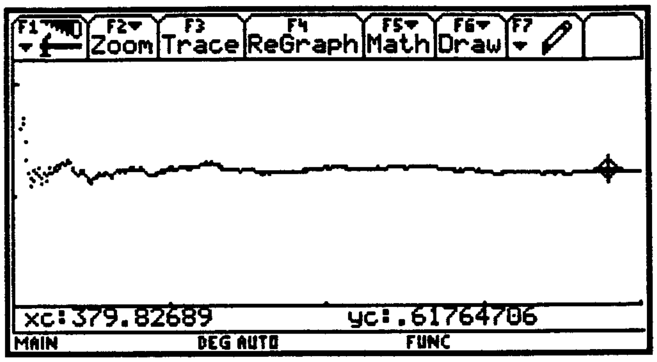
Die Verteilung läßt erkennen, daß die meisten z-Werte kleiner als 4 sind. Wir wählen deshalb z=4 und simulieren die Gewinnhäufigkeit eines Spielers bei 400 Versuchen.

Folgendes Programm leistet das:

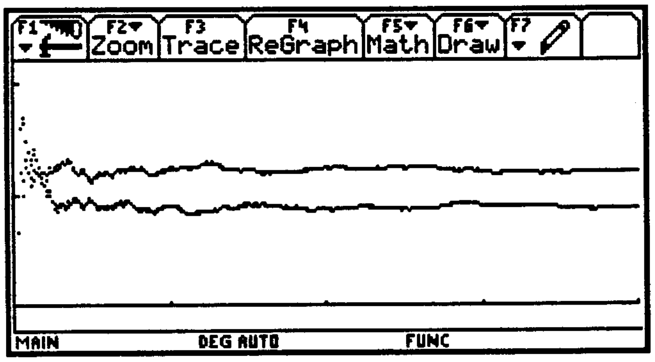
:t3a()	
Prgm	
:-.1 → xmin	Einteilung des Graphikfensters (s.o.)
:400 → xmax	
:100 → xscl	
:-.1 → ymin	
:1.1 → ymax	(Da relative Häufigkeiten ermittelt werden.)
:.5 → yscl	
:0 → g	Zählvariable g für Gewinne wird auf 0 gesetzt.
:For x,1,400,1	
:(rand(6)+rand(6))/rand(6) → z	
:If z>4 Then	Falls z>4, wird g um eins erhöht (Gewinn).
:g+1 → g	
:PtOn x,g/x	Der Punkt mit den Koordinaten (x,g/x) wird gezeichnet. g/x entspricht der relativen Häufigkeit eines Gewinns nach x Versuchen.
:Else	
:PtOn x,g/x	
:EndIf	
:EndFor	
:EndPrgm	

Die meisten Programmbefehle sind über F2 bzw. F3 aufrufbar.

Wir führen das Programm aus. Nachdem die Simulation abgeschlossen wurde, kann die erzeugte Punktmenge mit TRACE (F3) weiter untersucht werden. Bei unserer Simulation erhalten wir für die relative Häufigkeit y=0,61764706. Damit liegt die Gewinnchance deutlich über ein Drittel.



Im Programm ändern wir deshalb die Zeile **:If z>4 Then** auf **:If z>5 Then** um und starten erneut. Die relative Häufigkeit für einen Gewinn beträgt jetzt y=0,38235294.



Bei z=6 beträgt sie (bei unserer Simulation) 0,31176471.

Ergebnis: bei Variante a) muß für z die Zahl 6 festgelegt werden.

Eigenständig: Lösen Sie die Aufgabe für Variante b) (Ergebnis: z=5)

Lösung (Frage 2:)

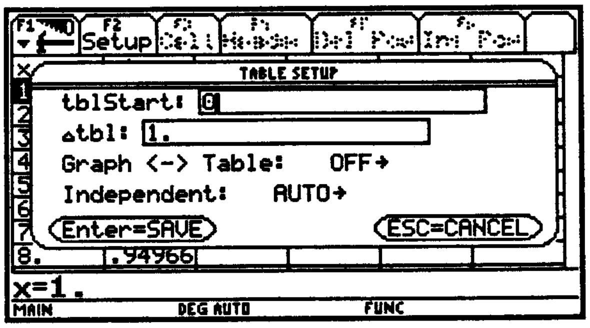
Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn: P(G) = 0,31176

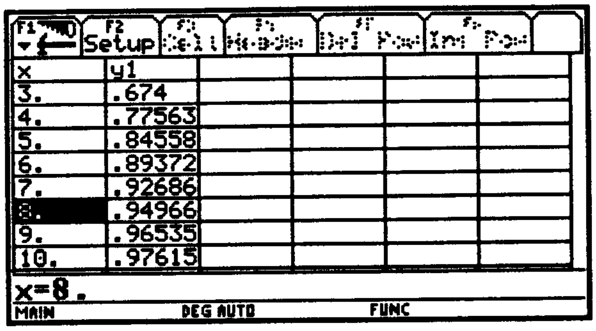
Wir betrachten das Gegenereignis $\overline{G}$: 'Kein Gewinn in 1 Spiel': $P(\overline{G}) = 0,68824$

Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Gewinn in x Spielen: $1 - 0,68824^x$.

Lösung mit Tabelle:

Im Y=Editor wird die Funktion y=1-0,68824^x definiert und aktiviert.
Anschließend wird eine Tabelle erzeugt (APPS, Table). Im Setup wird der Startwert für x=0 und die Schrittweite 1 festgelegt.





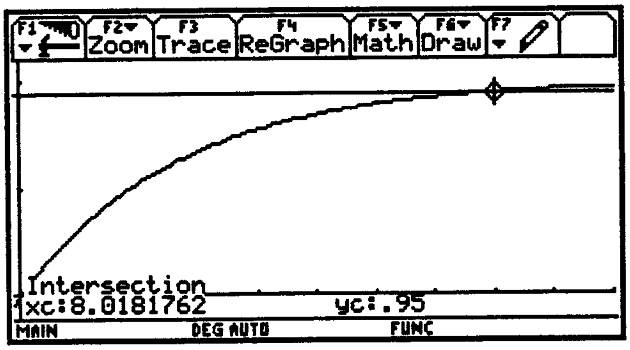
In der Spalte y1 ist das Ergebnis sofort ablesbar.
Bei x=9 ist die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einen Gewinn zu erzielen 0,96535 und damit erstmals größer als 0,95.

Ergebnis: Man muß mindestens 9 Spiele spielen.

Graphische Lösung:

Im Y= Editor werden die Funktionen *y1=y=1-0,68824^x* und *y2=0.95* definiert und aktiviert. Anschließend werden die Graphen mit (♦ *GRAPH*) gezeichnet und der Schnittpunkt ermittelt. Zuvor ist es sinnvoll, ein geeignetes Fenster zu definieren:
WINDOW : xmin=-.1 ; xmax=10 ; ymin=-.1 ; xmax=1.1

Den Schnittpunkt kann man mit Hilfe der TRACE Funktion oder mit dem Befehl '*Intersection*' *(F5)* ermittelt werden. Danach hat man noch ein Intervall für den Schnittpunkt einzugeben.
Als Lösung erhält man: 8,01817.



Ergebnis: Man muß mindestens 9 Spiele spielen.

Aufgabe 2:

Wir bleiben bei dem Besitzer eines Würfelstandes. Als weitere Varianten eines Würfelspiels denkt sich der Besitzer folgende Möglichkeiten aus: Unterschreitet die gewürfelte Augenzahl eines Spielwürfels eine Zahl n, so gilt der Wurf als Fehler

Variante a) Es wird gleichzeitig mit 4 Würfeln geworfen.
Variante b) Es wird gleichzeitig mit 6 Würfeln geworfen.

Der Spieler erzielt einen Punkt, wenn höchstens die Hälfte der Würfel einen Fehler zeigt.
Frage: Wie ist n zu wählen, damit die Wahrscheinlichkeit für das Erzielen eines Punktes bei Variante b größer ist, als bei Variante a?

Lösung:

Es sei q die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler und p die Wahrscheinlichkeit für keinen Fehler (p=1-q).

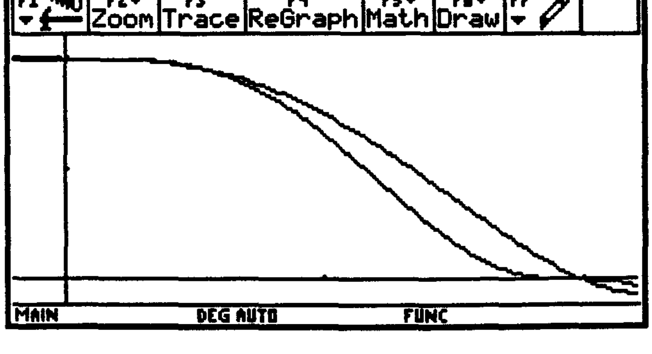
Variante a): Dann ist q^4 die Wahrscheinlichkeit für 4 Fehler bei 4 Würfeln und $3q^3p$ die Wahrscheinlichkeit für genau drei Fehlern bei 4 Würfeln. (Veranschaulichung über Baumdiagramm oder Binomialverteilung).

Der Spieler bekommt einen Punkt bei weniger als drei Fehlern. Die Wahrscheinlichkeit für das Erzielen eines Punktes beträgt also $1-(q^4+3q^3p)$.

Wir ersetzen q durch x und p durch 1-x und definieren die Funktion *y3= 1-(x^4+3x^3(1-x))* im *Y= - Editor.*

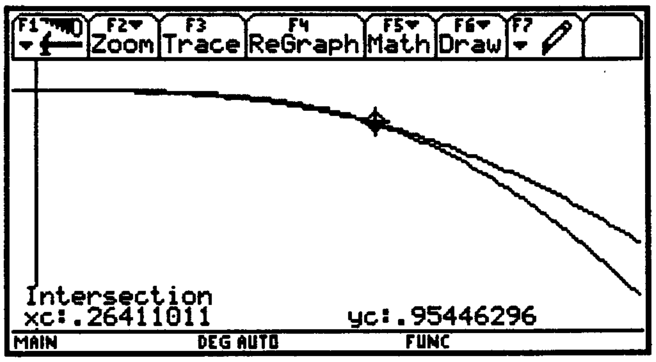
Variante b): Dann ist q^6 die Wahrscheinlichkeit für 6 Fehler bei 6 Würfeln , $6q^5p$ die Wahrscheinlichkeit für genau 5 Fehler bei 6 Würfeln und $15q^4p^2$ die Wahrscheinlichkeit für genau 4 Fehler bei 6 Würfeln (Herleitung über Binomialverteilung).
Der Spieler bekommt einen Punkt bei weniger als vier Fehlern. Die Wahrscheinlichkeit für das Erzielen eines Punktes beträgt also $1-(q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2)$. Wir ersetzen q durch x und p durch 1-x und definieren die Funktion y4=1-(x^6+6x^5(1-x)+15x^4(x-1)^2) im Y= Editor.

Die graphische Darstellung der Funktionen liefert das folgende Bild bei der WINDOW-Einstellung: xmin=-.1 ; xmax=1.1 ; ymin=-.1 ; ymax=1.1 .



Im „rechten" Teil der Darstellung liegt der Graph von y3 über dem von y4. Die Wahrscheinlichkeit für einen Punkt ist dort bei 4 Würfeln größer als bei 6.

Durch Anwendung der Funktion `ZOOM, BOX (F2)` kann man den „linken" Teil der Darstellung genauer untersuchen. Hier liegt zunächst für x>0 der Graph von y4 über dem von y3. Wir ermitteln die Schnittstelle beider Graphen (`F5, intersection`): x = 0,26411011.



Bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 0,2641 besteht theoretisch bei Verwendung von 4 Würfeln dieselbe Wahrscheinlichkeit für das Erzielen eines Punktes wie bei 6 Würfeln. Ist die Fehlerwahrscheinlichkeit größer, so besteht die höhere Wahrscheinlichkeit für das Erzielen eines Punktes bei der Verwendung von 4 Würfeln. Ist die Fehlerwahrscheinlichkeit kleiner, so besteht die höhere Wahrscheinlichkeit für das Erzielen eines Punktes bei der Verwendung von 6 Würfeln.

Nur für n=2 ist die Fehlerwahrscheinlichkeit $(\frac{1}{6})$ kleiner als 0,2641.

Damit ist nur für n=2 die Verwendung von 6 Würfeln günstiger als von 4 Würfeln.

Literatur:

[1] Hans Bock, Werner Walsch. - Mathematik, entdecken, Verstehen, Anwenden, Klasse 7. Oldenbourg-Verlag. - München, 1993

[2] Bettinaglio, Hartmann, Schneebell. - Mathematik sehen, Graphikrechner im Unterricht. Sabe, Zürich. - 1994