Zahlen und Terme

Inhalte	Ziele
• Gemeine Brüche und Dezimalbrüche • Komplexe Zahlen • Primfaktorzerlegung • Faktorisieren von Polynomen • Termumformungen • Graphische und numerische Darstellung von Termen	• Verschiedene Zahlendarstellungen auf dem Rechner kennenlernen • Zahlentheoretische Problemstellungen mit Hilfe des Rechners bearbeiten lernen • Erkennen und Überprüfen der Äquivalenz von Termen • Möglichkeiten graphischer Darstellung von Termen kennenlernen • Erstellen von Wertetabellen gegebener Terme

1. Gemeinsame Erarbeitung grundlegender Befehle

1.1 Verschiedene Zahldarstellungen

a) Stellen Sie $\sqrt{20}$ auf verschiedene Arten symbolisch und numerisch dar.

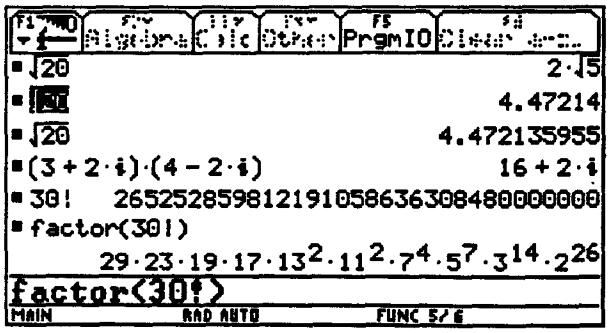
Befehle: `Enter` ◆ `Enter` `MODE DISPLAY DIGITS`

b) Berechnen Sie $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$ als gewöhnlichen Bruch und als numerische Näherung.

c) Berechnen Sie (3+2i)(4-2i).

Befehl:: `2nd i`

d) Berechnen Sie 30! und die Primfaktorzerlegung von 30!



Befehle:

◆`K` oder `2nd- CATALOG` oder `2nd MATH Probability F2 - factor(`

1.2 Zerlegen in Primfaktoren

a) Zerlegen Sie $10^{10}+1$, $10^{20}+1$, ... in Primfaktoren:

Hinweis: Berechnungen können beim Rechner mit Hilfe von ON gestoppt werden!.
Mit `CLEAR` bzw. `CLEAR CLEAR` kann die Eingabezeile gelöscht werden.

b) Faktorisieren Sie die Polynome $x^4 - 1$ und $x^2 - x - 1$.

Hinweis: Das 2. Polynom läßt sich (aufgrund der Wurzelausdrücke) nur dann faktorisieren, wenn die Variable x nochmals ausdrücklich angegeben wird, also: `factor` ('Ausdruck', x)

1.3. Auflösen von Klammern

Lösen Sie auf: $(x - 5)^3$ = ...

Befehle: `F2 - expand(`

1.4 Substituieren

a) Berechnen Sie $(x-5)^3$ an der Stelle $x=2$.

Befehle: „So-daß"-Operator: `[2nd k] | x = 2`

b) Berechnen Sie $f(x,y) = x^2 + y^2$ an der Stelle (2,3):

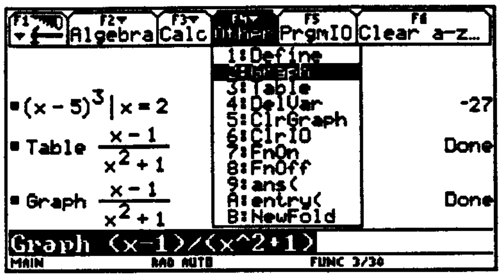
Befehl: `[2nd k] | x = 2 and y = 3`

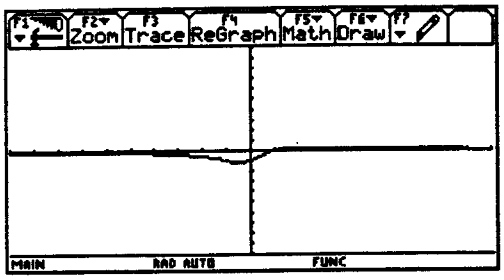
c) Substituieren von Variablen: Substituieren Sie in dem folgenden Term für die Variable x einmal t und dann t^2: $x^2 - 2x - 6$

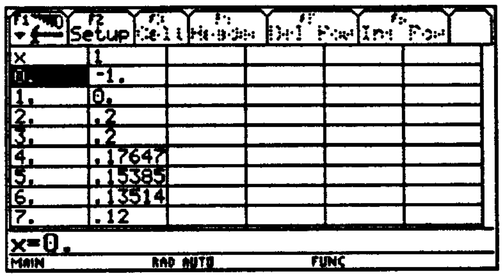
1.5 Wertetabellen und Graphen von Termen

a) Geben Sie eine Wertetabelle sowie eine graphische Darstellung für den Term T(x) = $\dfrac{x-1}{x^2+1}$, x = 1, 2, ... an

Befehle: `F4 - Table` und `F4 Graph`

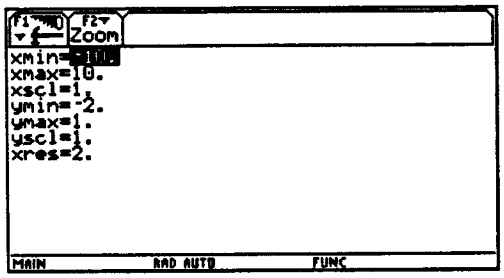


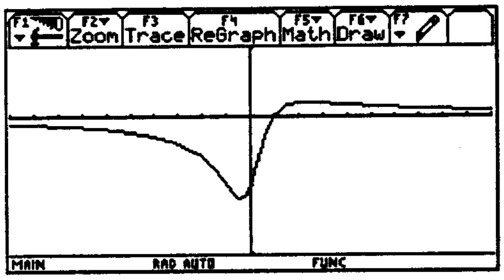




Hinweis: Mit `MODE Split Screen` kann der Bildschirm geteilt werden. Mit `[2nd APPS]` ↔ wird zwischen den Bildschirmfenster hin- und hergeschalten.

Befehle: ♦ *Table* ♦ *Graph* ♦*Home* ♦*Window F4 ClrGraph*

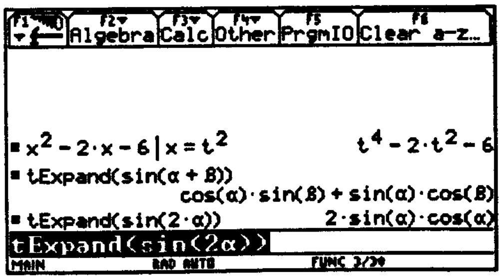




1.6 Trigonometrische Berechnungen

Stellen Sie das Additionstheorem für $\sin(\alpha + \beta)$ auf dem Rechner dar. Drücken Sie $\sin(2\alpha)$ durch trigonometrische Ausdrücke aus, die nur von α abhängen.

Befehle: `[2nd +] CHAR Greek` und `F2 - Trig - tExpand(`



2. Arbeitsblatt

2.1 Kettenbrüche

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ldots}}}}}$$

Brouncker (1620 - 1684) fand den folgenden Kettenbruch als Näherung für die Zahl π:

Indem man sukzessive jeweils neue Brüche im letzten Nenner hinzufügt, erhält man eine Näherungsfolge für π. Geben Sie die ersten Glieder dieser Folge an.

2.2 Endnullen von n!

Wie viele 'Endnullen' hat 30! ? Warum? Wie viele Endnullen hat 40!, 50!, ...?

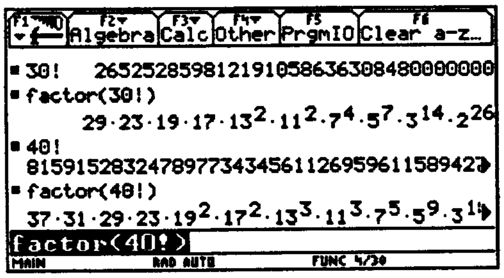
Anz(30!) = ...

Anz(40!) = ...

Anz(50!) = ...

Anz(60!) = ...

Was hat das alles mit der Primfaktorzerlegung von 30!, 40!, ... zu tun?



Begründung:

....

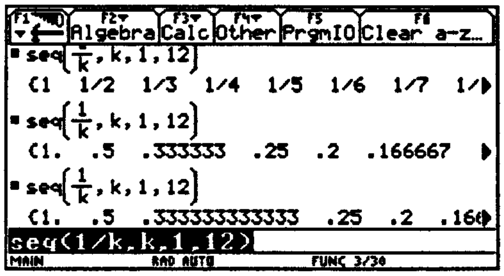
....

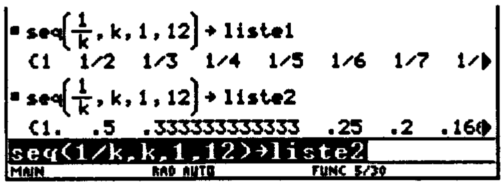
....

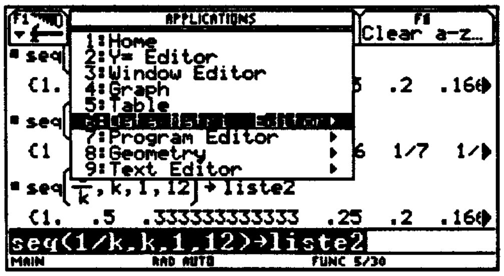
2.3 Stammbrüche

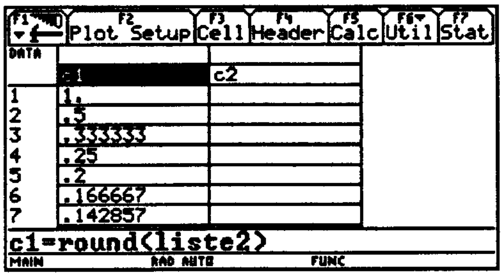
Brüche $\frac{1}{n}$ mit n = 1, 2, 3, ... heißen Stammbrüche. Versuchen Sie, Gesetzmäßigkeiten über die Periodenlängen der Dezimalbruchdarstellungen der Stammbrüche herauszufinden.

Für das Erzeugen der Folge der Stammbrüche ist der Befehl `seq(1/k, k, 1, 12)` → *liste2* und die Darstellung im APPS Data/Matrix- Editor hilfreich





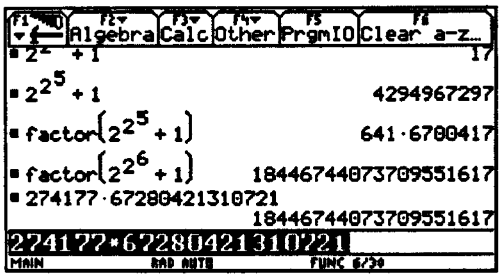




Im letzten Bild wurde mit ♦F die Zellenbreite erhöht. 'round' wandelt den Stammbruch in einen Dezimalbruch um.

2.4 Fermatsche Zahlen

FERMAT (1601-1665) vermutete, daß alle Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$, n = 1, 2, ... Primzahlen sind. 1732 zeigte EULER, daß F_5 keine Primzahl ist. Wie verhält es sich mit n = 6?



Das nebenstehende Ergebnis für F_6 zeigte Landry 1880 (ohne Rechner).

Vergleichen Sie F_6 mit der Anzahl der Weizenkörner auf 'Sessas Schachbrett'!

2.5 Binome

Das Binom $x^n - 1$ läßt sich in die Faktoren $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$ zerlegen, wobei sich der zweite Faktor häufig noch weiter aufspalten läßt, etwa: $x^{10} - 1 = (x-1)(x+1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$. Als Koeffizienten kommen hier nur +1 oder -1 in Frage. 1938 forderte N. Tschebotarew dazu auf, diese Vermutung zu beweisen. Doch 1941 entdeckte W. Iwanow, daß ein Faktor von $x^{105} - 1$ den Koeffizienten -2 enthält. Zeigen Sie dies!

3. Didaktische Fragen

- Welche Termumformungen müssen vom Schüler auch zukünftig noch 'per Hand' durchgeführt werden können?
- Halten Sie es für sinnvoll, eine engere Beziehung zwischen Termen und Funktionen herauszustellen?
- Welche Möglichkeiten sehen Sie, neue Aspekte des Zahlbegriffs durch die Verwendung des Rechners aufzuzeigen?
- Welche neuen zahlentheoretischen Fragestellungen könnten den MU beleben?
- Der TI-92 ist eine als Formelsammlung! Welche Konsequenzen ergeben sich daraus?