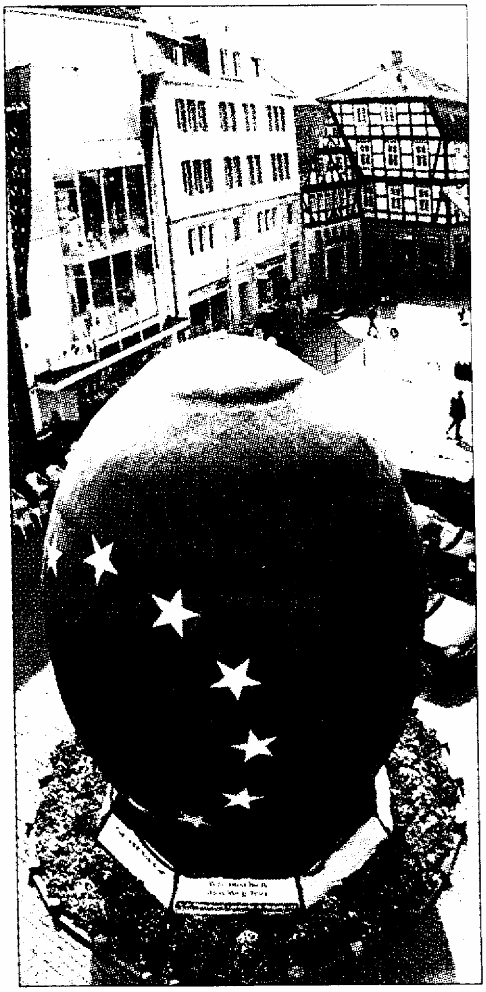
Das **Ei** – eine mathematische Herausforderung.

von Heinz Laakmann



Mit einer Höhe von 7,62 Metern ist das Osterei auf dem Marktplatz der osthessischen Stadt Lauterbach wohl das größte der Welt. Seit zwei Jahren präsentiert sich das Riesenei als Euro-Ei, weil jedes Jahr mit dem Aufbau des Rieseneis vierzehn Tage vor Ostern ein sogenannter Euro-Markt verbunden ist. Foto: dpa

Münstersche Zeitung, 13.4.2000

Egal ob Euroei, größtes Ei der Welt, oder schlicht nur Hühnerei, die Frage bleibt:

Wie groß ist das Volumen, der Umfang, die Oberfläche?

Körper mit großen Ausmaßen finden wir im Alltag bei vielen Gelegenheiten. Das Euroei ist nur ein Beispiel für eine Vielzahl von Produkten, wie Flugzeug- und Bootskörper, Fässer und Glocken, die nicht durch Tauchexperimente oder andere physikalische Methoden volumenmäßig bestimmt werden können. Dennoch ist es in vielen Fällen notwendig und für Schülern einleuchtend und motivierend, das Volumen, den Umfang oder die Oberfläche zu berechnen.

Der reale Gegenstand wird in den seltensten Fällen mit einem mathematischen Funktionsterm ausgestattet sein. Bevor eine Berechnung beginnen kann, muss der Gegenstand daher zunächst „mathematisiert“ werden, d.h. es muss ein mathematisches Modell geschaffen werden, das es erlaubt, die Berechnungen durchzuführen. Da diese Modellkonstruktion in der Regel nicht eindeutig ist, werden unterschiedliche Ansätze auch zu verschiedenen Ergebnissen führen, deren Güte abgeschätzt werden muss.

Am Hühnerei kann exemplarisch diese Vorgehensweise demonstriert werden. Es bietet sich an wegen seines leichten *handlings* (aber Vorsicht: zerbrechlich*),* der schnellen Beschaffungsmöglichkeit und der guten Überprüfbarkeit der Ergebnisse.

Ziele der folgenden Unterrichtssequenz sind die Modellierung und der Vergleich verschiedener mathematischer Modelle - dargestellt an der Volumenberechnung des Hühnereis mit anschließender Umfang- und Oberflächenberechnung.

Voraussetzung:
Ermittlung von Funktionstermen zu vorgegebenen Grafen
Integralrechnung: Volumenberechnung von Rotationskörpern – Volumenberechnung von Körpern, deren Querschnittsflächenfunktion bekannt ist.

Unterrichtsplanung:
1. Praktische Bestimmung des Volumens im Reagenzglas (kann auch als Bestätigung der Berechnungen nach 4. erfolgen).
2. Mathematische Modellierung des Hühnereis in Gruppenarbeit.
3. Darstellung der verschiedenen Modellierungen.
4. Berechnung des Volumens mit den verschiedenen Modellen (arbeitsteilige Gruppenarbeit).
5. Darstellung der Ergebnisse.
6. Diskussion und evtl. Änderung der Modelle.
7. Herleitung der Bogenlänge und Berechnung des Eiumfangs.
8. Herleitung der Oberflächenfunktion und Berechnung der Eioberfläche.

Die Punkte 1. bis 6. sind in einer Doppelstunde zu bearbeiten. Für 7.und 8. benötigt man eine weitere Doppelstunde.

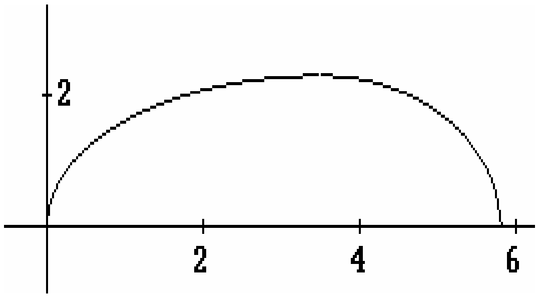
Durchführung

Für jede Gruppe stehen ein hart gekochtes Hühnerei und eine Schieblehre zur Verfügung.

Der Arbeitsauftrag lautet: *Entwickelt mathematische Modelle zur Berechnung des Eivolumens und beschreibt die dazu notwendigen Arbeitsschritte.*

Die Offenheit der Aufgabe wird schon in der Formulierung deutlich. Nicht nur ein Ergebnis wird erwartet, sondern mehrere, wobei die Lösungswege selbstständig zu finden sind. Die Aufgabenstellung gibt dazu keine weiteren Hinweise.

Dass das Ei als Rotationskörper angesehen werden kann, wurde schnell herausgefunden und akzeptiert. Damit war auch gleichzeitig die Rotationsachse bestimmt, und gesucht werden musste nun die Randfunktion. Herauszuarbeiten war, dass es günstig ist, den Rand mit abschnittsweise definierten Funktionen zu beschreiben. Während alle Gruppen bis zu dieser Stelle denselben Lösungsgedanken entwickelten, gingen die Wege von nun an auseinander.



Die Gruppen deuteten die obere Hälfte des Eirandes als:

Viertelellipse und Viertelkreis
Wurzelgraf und Viertelkreis
Logarithmusgraf und Viertelkreis

Der Viertelkreis, das dicke Ende des Eis, wurde auch als Wurzelgraf angesehen. Eine Gruppe, in der man sich an die früher behandelten Splines erinnerte, interpretierte den Rand als Graf einer Splinefunktion. Weitere Unterschiede gab es bei der Festlegung des Koordinatensystems.

Die folgenden notwendigen Arbeitsschritte sind:

1. Vermessung des Eis (mit der Schieblehre)
2. Berechnung der Funktionsterme (mit dem CAS)
3. Berechnung des Volumens (mit dem CAS)

Exemplarisch soll nun eine Schülerlösung aufgezeichnet werden:

Gemessen hatte die Gruppe im Reagenzglas ein Volumen von 65,5 cm^3
Die mit der Schieblehre ermittelten Messergebnisse zeigt die folgende Tabelle:

Länge	.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	3.7	4	4.5	5	5.5	6
Höhe	1	1.5	1.8	2	2.1	2.2	2.3	2.31	2.2	2	1.7	1.2	0

Die Gruppe interpretierte den ersten Teil als Graf einer Wurzelfunktion und den zweiten als Viertelkreis. Sie erhielt mit CAS (hier TI92) für die Gleichung der Randfunktionen

$y = 1{,}430529 \cdot x^{0{,}406024}$ und $y = \sqrt{2{,}31^2 - (x-3{,}7)^2}$

und als Maßzahl für das Volumen: 37,9824+25,8156=63,798.

Mit der Interpretation als Viertelellipse und Viertelkreis sind die Gleichungen:

$y = \dfrac{2{,}31}{3{,}7}\sqrt{3{,}7^2 - x^2}$ und $y = \sqrt{2{,}31^2 - (x-3{,}7)^2}$.

Hierbei ergibt sich als Volumenmaß:41,3508cm^3+25,8156 cm^3=67,1672 cm^3.

Eine Interpretation als Logarithmusgraf und Viertelkreis führt für die Randfunktionen zu

$y = 1{,}493067 + 0{,}655523 \cdot \ln x$ und $y = \sqrt{2{,}31^2 - (x-3{,}7)^2}$

und für das Volumen zu 38,1212cm^3+25,8156 cm^3=63,9368 cm^3.

Eine Berechnung mit Splinefunktionen erfordert auch mit einem CAS einen großen Rechenaufwand. Für 7 Messpunkte wurde ein Volumen von 59,0716 errechnet. Hier trat auch die größte Differenz zum gemessenen Wert auf. Bessere Ergebnisse würden weitere Messpunkte und einen noch größeren Zeit- und Rechenaufwand erfordern.

Bewertung
Die berechneten Funktionsterme und Volumenmaßzahlen sind abhängig von der Art der Modellierung. Im Vergleich mit der Messung durch ein Überlaufgefäß kann deren Güte bewertet werden. Die Güte wird aber auch beeinflußt durch die Exaktheit der Messungen. Je genauer das Ei mit der Schieblehre vermessen wird, desto genauer sind die Resultate. Es ist jedoch schwer, ein Ei exakt zu vermessen, und schon kleine Abweichungen verändern das Resultat. Andererseits unterliegt auch das Messen des Volumens im Reagenzglas einem Fehler, der selten unter 1 cm^3 liegt.

Durchführung
In der Berechnung des halben Längsumfangs liegen die berechneten Ergebnisse noch näher zusammen (Viertelellipse: 4,78 cm, Wurzelgraf: 4,72 cm und Logarithmusgraf: 4,66 cm - unter Einbeziehung einer Verschiebung bis zur Nullstelle - jeweils plus 3,61 cm für den Viertelkreis). Hier bereitet das reale Nachmessen größere Schwierigkeiten, wenn man eine hohe Genauigkeit erreichen will.
Die *Oberflächenberechnung* kann ohne ein CAS nicht durchgeführt werden, da die Formel für die Oberflächenberechnung: $O = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ lautet und das Integral nicht elementar zu berechnen ist.
Auch hier liegen die Ergebnisse nahe beieinander: Viertelellipse und Viertelkreis: 80,57 cm^2; Wurzelgraf und Viertelkreis: 78,63 cm^2 sowie Logarithmusgraf und Viertelkreis: 78,52 cm^2.