Folgen

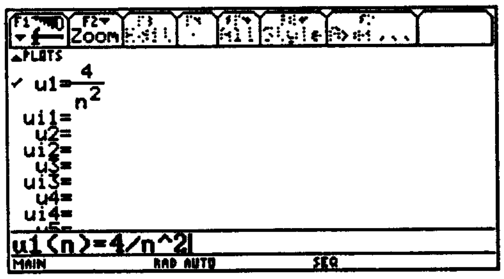
Inhalte	Ziele
• Graphische und numerische Darstellung explizit definierter Folgen • Rekursive Definition arithmetischer und geometrischer Folgen • Summenformeln verschiedener Reihen • Verschiedene Darstellungen von Iterationsfolgen • Lösen von Gleichungen mit Hilfe von Iterationsfolgen	• Unterschiedliche Darstellungen von Folgen kennenlernen • Summenformeln verschiedener Reihen kennenlernen • Iterationsprozesse dynamisch interpretieren lernen • Beziehungen zwischen Iterationen und Gleichungslösen erkennen • Näherungskurven konstruieren • Kriterien für optimale Näherungskurven kennenlernen

1. Gemeinsame Erarbeitung grundlegender Befehle

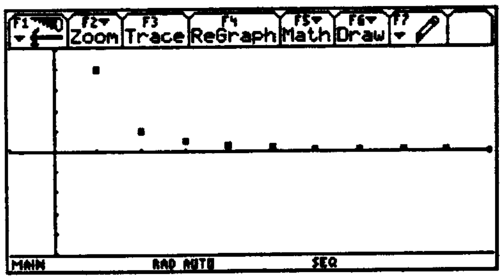
1.1 Explizit definierte Folgen

Stellen Sie die Folge $(a_n)_N$ mit $a_n = \frac{4}{n^2}$ graphisch und numerisch dar.

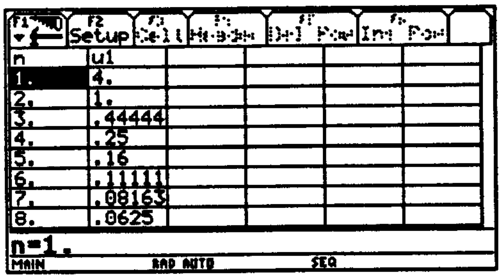
Befehle: Schalten Sie mit `MODE` - `Graph` auf ‘`Sequence`’ um



‘y =‘-Editor



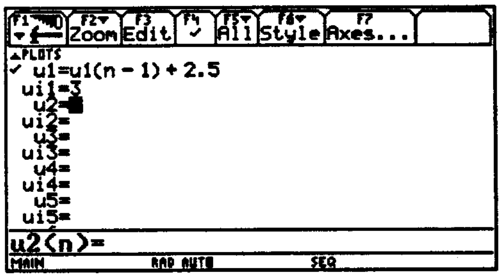
Graphikfenster

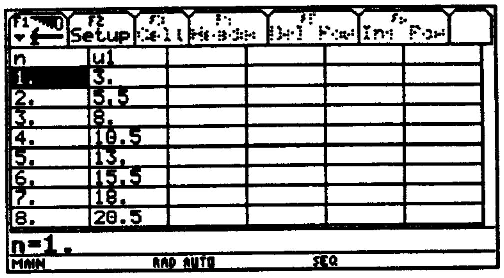


Hinweis: Mit `F1 Format` oder ♦ `F` kann die Zellenbreite verändert werden.

1.2 Arithmetische Folgen $a_{n+1} = a_n + d$.

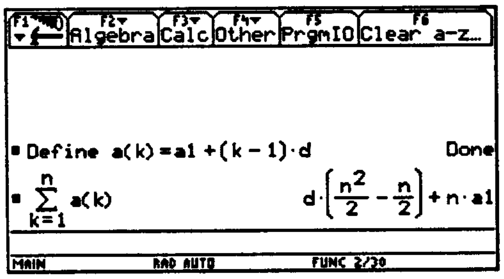
Stellen Sie die Folge mit d = 2,5 und $a_1 = 3$ dar.





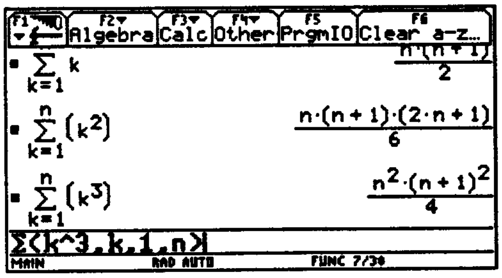
1.3 Summenformeln

Summe der arithmetischen Reihe.



Hinweis: Das Zeichen für die Summenformel ist dem Menü F3 entnommen.

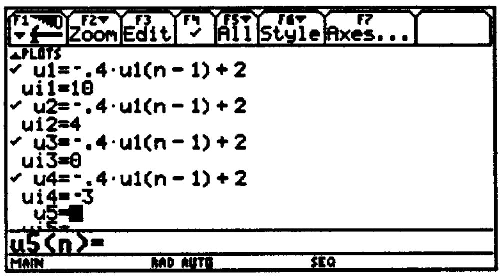
Summenformeln für: $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$ bzw. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$:

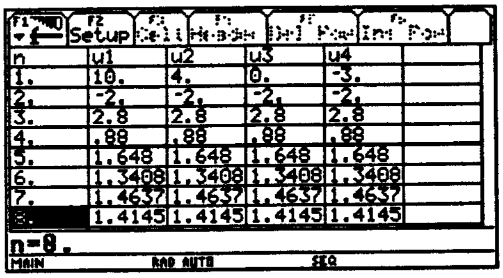


1.4 Iterationsfolgen

Wir betrachten die Folge $u_{n+1} = -0.4\, u_n + 2$ also die Folge $u_{n+1} = f(u_n)$ mit $f(x) = -0.4x+2$.

Wie verhalten sich für verschiedene Startwerte u_1 die Werte der Folgenglieder u_n?



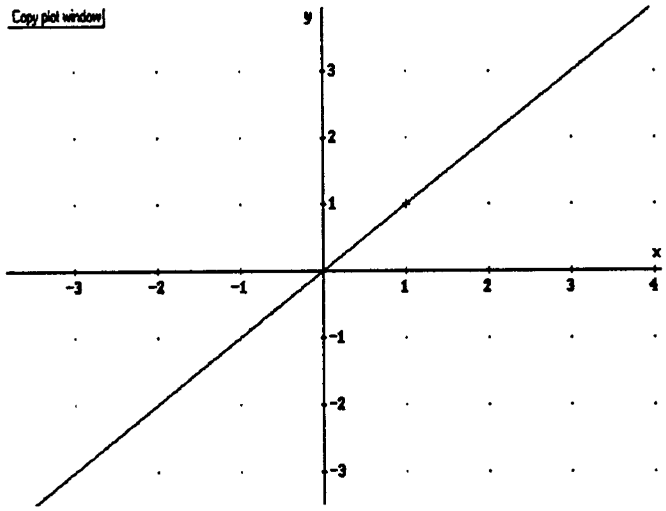


n	u1	u2	u3	u4
1.	10.	4.	0.	-3.
2.	-2.	-2.	-2.	-2.
3.	2.8	2.8	2.8	2.8
4.	.88	.88	.88	.88
5.	1.648	1.648	1.648	1.648
6.	1.3408	1.3408	1.3408	1.3408
7.	1.4637	1.4637	1.4637	1.4637
8.	1.4145	1.4145	1.4145	1.4145

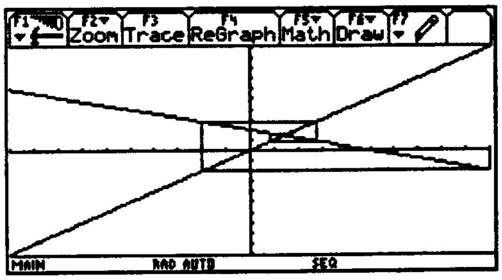
Das Entstehen der Iterationsfolge läßt sich mit der Funktion f in einem x-y-Koordinatensystem auf folgende Weise erklären:

x-Werte		**y- oder f(x)-Werte**
Startwert u_1	$\longrightarrow$	$u_2 = f(u_1)$
u_2	$\longrightarrow$	$u_3 = f(u_2)$
u_3	$\longrightarrow$	$u_4 = f(u_3)$
....		...
u_n	$\longrightarrow$	$u_{n+1} = f(u_n)$

(Dies entspricht einer Spiegelung an y = x)



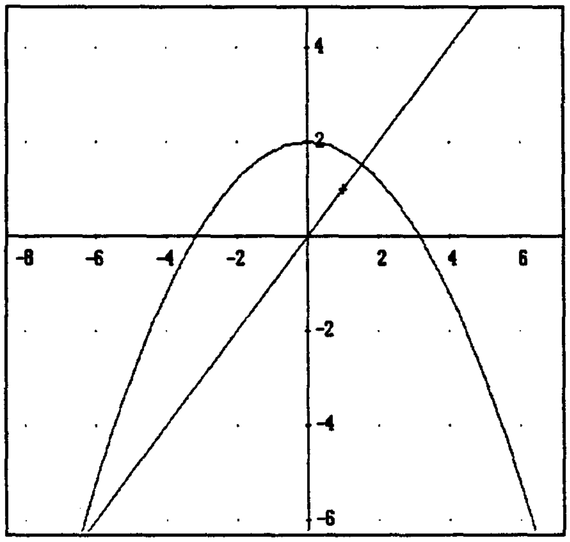
Im y-Editor unter `F7` `Axes` `Web` einstellen.
Damit läßt die Folge graphisch als 'Streckenzug' oder als 'Netz' (web) darstellen.



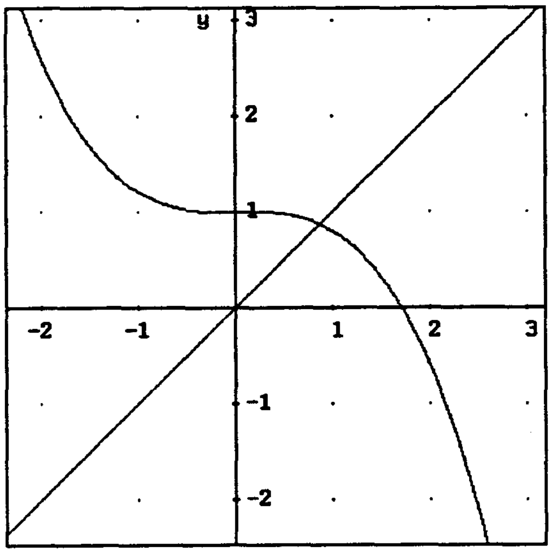
1.5 Lösen von Gleichungen

Mit Hilfe dieses Verfahrens lassen sich Gleichungen lösen:

1. $-0.2x^2 + 2 = x$, Startwert - 4



2. $-0.2\,x^3 + 1 = x$



1.6 Experimentieren mit Näherungsfolgen

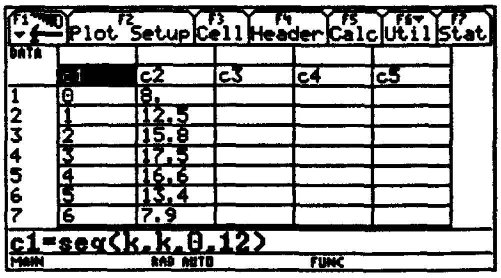
Beispiel: Die Lufttemperatur schwankt täglich und ist von zahlreichen Einflüssen abhängig. Wenn man die *langjährige* mittlere Lufttemperatur eines Monats berechnet, dann erhält man für München die folgenden Werte (vgl. Schmidt 1984, S. 74):

Monat	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jan.	Febr.	März	April
Temp.	8,0	12,5	15.8	17.5	16.6	13.4	7.9	3.0	-0.7	-2.1	-0.9	3.3	8.0

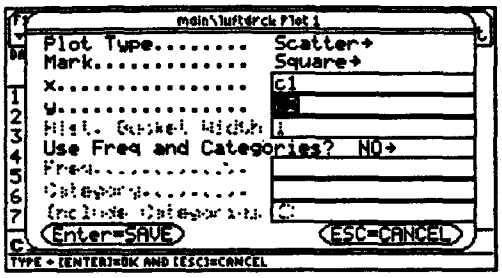
Vorgehensweise:

a) Geben Sie mit `APPS-Data/Matrix Editor-New-Variable`: 'Luftdr' ein.

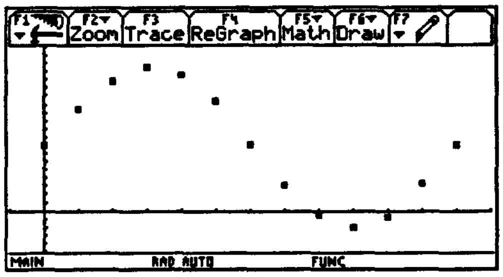
b) Tragen Sie bei c1: *c1 = seq(k,k,0,12)* und unter c2 die entsprechenden Temperaturen ein.



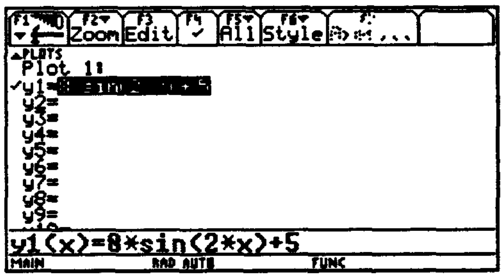
c) Mit `F2: Plot Setup` und `F1: Define` geben Sie unter x: *c1* und unter y: *c2* ein.



Unter ♦`Window` stellen Sie geeignete Werte ein und zeichnen den Graphen punktweise.

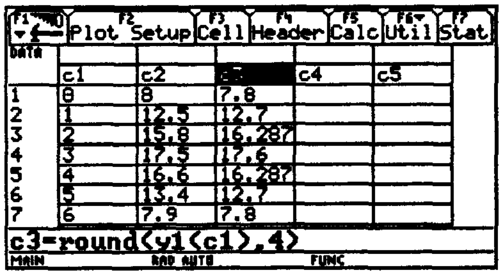


Suchen Sie jetzt (durch Probieren) - im y-Editor (♦ Y =) - eine Funktion, die diese Werte möglichst gut annähert.



Mit `APPS, 6, 1` gehen Sie wieder in den Daten/Matrix-Editor und geben unter c3 diese Funktion ein (leider muß beim TI-92 das 'round' eigens angegeben werden):

c3= round(y1(c1),4)



Geben Sie bei c4 ein: *c4 = (c2-c3)^2* und unter c5 den Befehle: c5 = cumsum(c4). Erklären Sie die Bedeutung von 'cumsum'!

2. Arbeitsblatt

2.1 Wie heißt die Summenformel für geometrische Folgen: $a_{n+1} = q\ a_n$? Berechnen Sie den Grenzwert für große n.

2.2 Wie heißen die Summenformeln für:

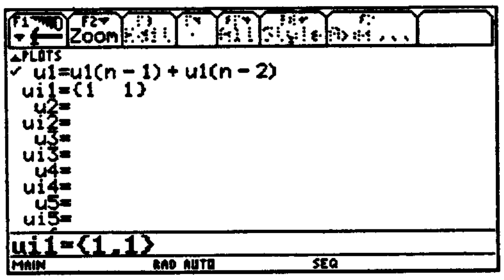
a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ ...\ + n^2 =$

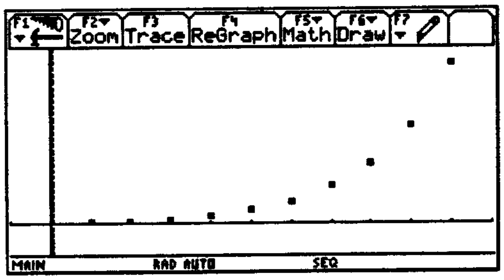
b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ...\ + n^3 =$

c) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$?

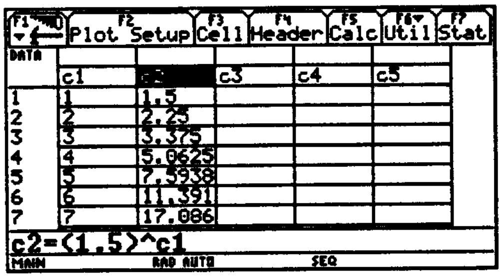
Berechnen Sie für n = 10, 100, 200, ... 1000. Euler berechnete 1736 den Grenzwert dieser Reihe zu $\frac{\pi^2}{6}$. Ab welchem n ist die Abweichung vom Grenzwert kleiner als 0.001?

2.2 Die Fibonacci-Folge: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, $f(0) = f(1) = 1$





Mit dem Daten-Matrix-Editor können Sie nun eine Exponentialfolge explizit definieren.



DATA	c1	c2	c3	c4	c5
1	1	1.5			
2	2	2.25			
3	3	3.375			
4	4	5.0625			
5	5	7.5938			
6	6	11.391			
7	7	17.086			

Suchen Sie den Faktor b bei c2 = b^c1 nun so, daß sich beiden Folgen möglichst gut annähern.

2.3 Die Kreiszahl π. Beginnend etwa mit dem regelmäßigen einbeschriebenen 6-Eck läßt sich sukzessive die Seitenlängen des 12-, 24-, ... Ecks berechen. Die entsprechende Rekursionsformel lautet: $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^{\ 2}}}$. Berechnen Sie Näherungswerte für die Zahl π.

2.4. Eine schöne Formel zur Berechnung von π stammt von dem indischen Rechengenie Ramanujan
(1887 - 1920).
Er gab folgende Formel an:

$$\frac{1}{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{k=0}^{n} \frac{(4k)! \cdot (1103 + 26390\,k)}{(k!)^4 \cdot 396^{4k}}$$

2.5. Mit Hilfe der Heron-Formel lassen sich Quadratwurzeln näherungsweise berechnen. Für $\sqrt{2}$ erhält man die Rekursionsformel:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

Wählen Sie einen beliebigen Startwert. Berechnen Sie $\sqrt{2}$ auf 10 Stellen genau. Wie viele Iterationsschritte brauchen Sie hierzu?